Nikola Brůžková, Helena Koldová

Vybrané aktivity pro výuku geometrie s využitím programu GeoGebra v kontextu „malé“ revize RVP ZV

Brůžková, Koldová Vybrané aktivity pro výuku geometrie s využitím programu GeoGebra

SERIA EDUCATION

Nikola Brůžková
Helena Koldová

Vybrané aktivity pro výuku geometrie s využitím programu GeoGebra v kontextu „malé“ revize RVP ZV

České Budějovice 2023

Seznam autorů:

Mgr. Nikola Brůžková
RNDr. Helena Koldová, Ph.D.

Vybrané aktivity pro výuku geometrie s využitím programu GeoGebra v kontextu „malé“ revize RVP ZV

Odborné recenze:	Mgr. Roman Hašek, Ph.D.
	Mgr. Šárka Voráčová, Ph.D.
Grafický návrh obálky:	Karel Řepa
Sazba:	Přemysl Rosa
Vydalo nakladatelství:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta
Počet stran:	146

1. vydání

ISBN 978-80-7694-004-8

Obsah

Úvod

V současné škole vzděláváme žáky pro život v 21. století, profil absolventa školy, ať již základní nebo střední, se proto mění. Projekt Národní soustavy kvalifikací[1] definoval potřeby základního vzdělávání z národohospodářského pohledu, aby se tak posílila flexibilita a adaptabilita pracovní síly na trhu práce. Mluvíme o společnosti 4.0, o průmyslu 4.0, futurologové tvrdí, že žáci dnešních základních škol zatím neznají profese, které budou aktuální pro trh práce v době, až dostudují. Je však zřejmé, že kompetence, které žáci získají v průběhu vzdělávacího procesu, budou rozhodující pro jejich profesní život. Na významu tak nabývají (kromě jiných) kompetence digitální, komunikativní, pracovní, sociální a personální. I z tohoto pohledu se může jevit výuka matematiky a informatiky jako zásadní pro rozvoj technické gramotnosti[2] obyvatelstva, a to právě z důvodu možnosti integrace s přírodovědnými nebo technickými disciplínami. Matematika a informatika však mají velký význam i pro další obory lidské činnosti: ekonomiku, dopravu, komunikaci, zdravotnictví aj.

V následujícím textu ukážeme možnou koncepci integrace dvou vzdělávacích oblastí Rámcově vzdělávacího programu pro základní vzdělávání[3] (RVP ZV), tedy vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace a vzdělávací oblasti Informatika, a to kurikulárně (obsahově) a didakticky (procesuálně). Uvedeme ukázky integrovaných aktivit vhodných pro multidisciplinární výuku. Ukážeme nové reprezentace a způsoby matematického modelování ve výukovém prostředí GeoGebra s podporou počítače.

V této práci uvádíme 20 ukázek pracovních listů, jejichž obsah je složen z 112 interaktivních individuálně vytvořených appletů[4] a z otevřených a uzavřených otázek pro žáky. Applety byly vytvářeny první autorkou během několika let jejího

[1] Národní soustava kvalifikací (https://narodnikvalifikace.cz)

[2] V kontextu definice technické gramotnosti jako „schopnosti lidského jedince rozumět technickým procesům a schopnosti používat je, posoudit a stanovit správné technologie a přístupy.“, dostupné z materiálu TAČRu Definice technického vzdělávání, 2017, s. 8 Dostupné z: https://www.mpo.cz/assets/cz/prumysl/zpracovatelsky-prumysl/2017/5/V2_Definice-obsahu-TeV-na-ZS.pdf

[3] Rámcové vzdělávací programy (RVP) pro různé typy škol, obory vzdělávání vznikaly a byly pilotovány postupně od roku 2000. RVP pro základní vzdělávání (RVP ZV) je dostupný na adrese https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

[4] „Digitální nástroj generovaný pomocí softwaru GeoGebra s příponou ggb. Vzhledem k povaze softwaru s otevřeným zdrojovým kódem mohou být sdílené applety upravovány a dále používány

studia jednou na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, pracovní listy byly připraveny následně ve spolupráci s druhou autorkou publikace. Tento soubor budeme v publikaci označovat jako *digitální materiál*[5] *Nová geometrie*. Převážná část aktivit byla vytvořena volnou transformací ze zadání vybraných úloh z vybrané učebnice matematiky *Matematika pro 8. ročník základní školy* (Odvárko & Kadleček, 2013). Učebnici, budeme ji zde nazývat *U*, jsme současně prozkoumaly z hlediska její připravenosti na distanční výuku (Brůžková, 2022). Úlohy a zadání aktivit v *digitálním materiálu Nová geometrie*, kterými jsme se inspirovali nebo je převzali z učebnice U, byly transformovány do interaktivní podoby. Vznikl tak digitální materiál, který pokrývá učivo RVP ZV v tematickém okruhu Geometrie v rovině a prostoru a cílí na rozvoj a řešení kritických míst kurikula geometrie.

Veškerý vytvořený digitální materiál je uzpůsoben pro využití v novém prostředí geometrického náčrtníku GeoGebry[6] v aplikaci GeoGebra Classroom, která umožňuje učiteli sledovat práci všech žáků v reálném čase na jednom místě a průběžně vyhodnocovat jejich práci při vyučování. O programu GeoGebra se čtenář více dozví v kapitole 5 této publikace. Kniha, kterou jsme pojmenovaly *Vybrané aktivity pro výuku geometrie s využitím programu GeoGebra v kontextu „malé revize" RVP ZV*, obsahuje zároveň návody, jak s programem GeoGebra pracovat. Návody překládala první z autorek této knihy, přeloženy byly z anglického do českého jazyka během jejího studia na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích ve spolupráci s další studentkou, pedagogickým sborem katedry matematiky a redak-

ostatními studenty, uživateli či učiteli po celém světě." (Hohenwarter et al., 2009, s. 14, volně přeloženo)

[5] „David Wiley definuje digitální materiál jako libovolný učební materiál v elektronické podobě využitelný bez dalších úprav přímo ve výuce." (Dvořáková, 2014, s. 17)
„Tvůrcem digitálního materiálu se může stát téměř každý. Digitální materiál musí zahrnovat kurikulum, které odpovídá rámcovému vzdělávacímu programu, dále by měl být veřejně dostupný, tedy umístěný na webu, flexibilně použitelný, dynamický a měl by obsahovat interaktivní prvky (např. interaktivní nástroje, pracovní prostředí, modely, simulace). Práci v něm by mělo být možné uložit a zpětně upravovat." (Choppin & Zenon, 2017, s. 10)
„Digitální materiály jsou dostupné v elektronické podobě, jsou využitelné přímo ve výuce bez dalších úprav. Nejčastěji se jedná o pracovní listy, prezentace, audio a video ukázky. Ideální digitální učební materiál nenahrazuje samotnou výuku, ale vhodně ji doplňuje a podporuje aktivitu žáků. Digitální učební materiály nabízejí pohled na souvislosti, kladou otázky, vyzývají k činnostem." (Neumajer, 2020)
„S digitálními materiály je často spojována metafora „lego", každý digitální materiál je „kostičkou lega", která je dílčí a lze ji různě kombinovat a upravovat dle aktuálních potřeb." (Wiley, 2000, volně přeloženo)

[6] Software, který umožňuje tvorbu dynamických ilustrací. Takovým softwarem je například GeoGebra (https://www.geogebra.org). Dynamické ilustrace mají mnoho výhod, a to pro učitele i pro studenty. Mezi ně například patří možnost v aktuálním čase plynule přizpůsobovat ilustraci změnám vstupních parametrů úlohy, možnost zprostředkování animace (plynulého znázornění postupu konstrukce, pohybu technického zařízení) nebo možnost umisťovat matematické konstrukce do obrázku a fotografií.

torkou pro český překlad GeoGebry, která zajistila jejich zveřejnění na hlavní stránce návodů, kterou uživatel nalezne na https://www.geogebra.org/a/14?lang=cs. Mimo návody v českém jazyce jsou na webové stránce k dispozici také návody v angličtině, z nichž vychází již zmíněný český překlad.

Budeme velmi rády, když naše publikace bude sloužit jako inspirace a motivace pro učitele k další tvorbě digitálních materiálů, k integraci vzdělávacích oblastí nebo jako materiál, který učitel může použít bez přípravy a ihned v hodině matematiky nebo hodině informatiky.

1

Digitální věk

Pokud čtete tuto knihu, zajímá vás podoba vzdělávání v době, která bývá označována jako „digitální věk“ nebo věk nových médií (Eurofound, 2021). Jak učit žáky v takové době? V digitálním věku bychom očekávali, že se dostanou do popředí otázky, které souvisejí s využitím informačních a komunikačních technologií (ICT[7]) a s jejich efektivním využitím, s vhodným a správným začleněním do výukového procesu. Škola je místem, ve kterém probíhá rozvoj schopností žáků nebo studentů, absolventi po absolutoriu školy vstupují do produktivního světa práce informační společnosti[8]. Škola by měla ukazovat způsoby, jak efektivně a vhodně ICT využívat k sebe rozvoji a tvorbě např. vlastního kreativního obsahu, a to nejen v průběhu školního vzdělávání, ale v průběhu celoživotního učení. Nezná-li žák způsoby efektivního využití technologií v občanském životě, může se stát, že je bude používat pouze jako prostředek jednoduché zábavy. Tou jsou např. hry nebo socializace na sociálních sítích, což přináší mnohá zásadní rizika. Více informací čtenář najde např. v publikaci *Digitální demence* (Spitzer, 2014).

Problematika využití ICT se stala aktuální koncem 20. století, touto dobou již téměř celý svět pokrývala síť World Wide Webu[9] (zkrácený a běžně užívaný název je Web). Nově narození v letech 1990–2000 (dále pouze generace Z[10]) vyrůstali

[7] ICT je zkratka z anglického Information and Communication Technologies – označuje informační a komunikační technologie. Dostupné z https://it-slovnik.cz/pojem/ict/?utm_source=cp&utm_medium=link&utm_campaign=cp

[8] Pro pochopení obou významů „vědění“ a „informační“ volíme text sociologa Arnošta Veselého: „Vzhledem k roztříštěnosti diskuse, vágnosti pojmu a neuvěřitelné různorodosti problémů diskutovaných v souvislosti se společností vědění není možné hovořit o specifických „školách“ nebo „myšlenkových proudech“, stejně jako není účelné kontrastovat různá vymezení a definice společnosti vědění. V současné době lze nejlépe pochopit společnost vědění jako značně rozvolněný teoretický koncept popisu současné společnosti, který eklekticky a kriticky čerpá z mnoha ideových zdrojů (zejména z teorií postindustriální společnosti, informační společnosti, ekonomiky založené na vědění a sociologie vědy a vědění). Nejefektivnějším přiblížením konceptu společnosti vědění se tak zdá být rozbor myšlenkového vývoje, kterým tento koncept prošel během posledních čtyřiceti let s poukazem na změnu v tématech i v náhledu na ně.“ (Veselý, 2004, s. 435)

[9] Označení pro systém prohlížení, ukládání a odkazování dokumentů nacházejících se v internetu.

[10] K definování pojmu generace Z volíme volně přeložený text publikace Gen Z: „Generaci Z („Digital Natives (Palfrey & Gasser, 2008, s. 10)“) tvoří narození mezi lety 1996 a 2009 (McCrindle, 2014, s. 14). Tato generace je známá tím, že je technicky zdatná, zároveň ale zažila krize, změny klimatu,

v prostředí ICT, znali svět online, který se velice rychle mění, přináší nové možnosti a generuje denně obrovské množství nových informací. Jako generace alfa[11] byla pak pojmenována generace dětí rodících se v roce 2010 a v létech následných (pravděpodobně do 2024). Tato generace je již výrazně vázaná na nové technologie, na virtuální elektronické prostředí a počítačové modely pro potřeby rozhodování a sedavá zaměstnání.

Stručně řečeno generace žáků (ať je nazveme jakkoli), žijí a budou žít ve světě, ve kterém vzdělávání bude procházet stálou proměnou. Musí dojít k posunu od frontálního systému vzdělávání k systému vzdělávání menších skupin. Škola by se měla stát místem pro rozvoj kritického myšlení, pro pěstování schopnosti řešit problémy a ověřování a kritické hodnocení dostupných informací (Poosnick-Goodwin, 2010). Jak učit žáky a studenty generace alfa? Jak na nové potřeby školy budoucnosti bude reagovat a reaguje školní praxe?

Člověk žijící v 21. století by měl dosahovat určité míry znalostí, zkušeností, schopnosti orientovat se v dané problematice, kriticky hodnotit informace, měl by být *digitálně gramotný*[12]. Cílem Strategie 2030+[13] je proto modernizovat vzdělávací systém Česka v oblasti regionálního školství, zájmového a neformálního vzdělávání a celoživotního učení, připravit ho na nové výzvy a zároveň řešit problémy, které v českém školství přetrvávají. Jedním z logických závěrů vyplývajících z uvedených cílů je požadavek upravit a modernizovat rámcové vzdělávací programy v České republice.

V uplynulých letech probíhaly a stále probíhají často i velmi vyhraněné debaty nad revizemi RVP ve všech vzdělávacích oblastech. Ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace se připravují revize kurikula[14], byly vydány Standardy a Metodické komentáře[15]. Revize ICT kurikula byla zahájena v roce 2016. V dubnu 2018 byl upraven Návrh revizí rámcových vzdělávacích programů v oblasti informatiky a informačních a komunikačních technologií, který spolu s rámcem očekávaných

terorismus a velkou recesi, všechny tyto temné události nepochybně učinily tuto generaci opatrnější, pragmatičtější a poskytly jí inspiraci ke změně světa. Jejich výchova probíhá ve velmi odlišném a velmi rychle se měnícím prostředí než u předchozích generací (generace X, Y), protože již od raného věku technologie využívají, velmi rychle je bez problémů integrují do všech oblastí svého života.“ (Sladek & Grabinger, 2013, s. 4)

[11] Viz např. http://en.wikipedia.org/wiki/GenerationZ

[12] „Digitální gramotnost pojímáme jako soubor digitálních kompetencí (vědomostí, dovedností, postojů, hodnot), které potřebuje jedinec k bezpečnému, sebejistému, kritickému a tvořivému využívání digitálních technologií při práci, při učení, ve volném čase i při svém zapojení do společenského života.“ (MŠMT, 2020a, s. 4)

[13] Strategie 2030+ je klíčový dokument pro rozvoj vzdělávací soustavy České republiky pro období 2020–2030 https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/strategie-2030

[14] Podkladová studie je dostupná z http://www.nuv.cz/file/3486/

[15] Standardy a Metodické komentáře jsou dostupné z https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/20617/METODICKE-KOMENTARE-KOBORU-MATEMATIKA-A-JEJI-APLIKACE.html/

výstupů pro informatiku a digitální gramotnost sloužil jako podklad pro pokusné ověřování rozvoje informatického myšlení (Národní ústav pro vzdělávání, 2018). V lednu 2021 pak vyšla nová verze RVP ZV, tzv. „malá revize“[16].

Nová podoba RVP přinesla řadu změn. Došlo k začlenění nové klíčové kompetence – *digitální* – a k definování nové vzdělávací oblasti *Informatika* (ve staré verzi RVP ZV oblast nesla název Informační a komunikační technologie). Vzdělávací oblast *Informatika* se zaměřuje především na rozvoj informatického myšlení a na porozumění základním principům digitálních technologií. Digitální kompetence žáků v jednotlivých vzdělávacích oborech RVP ZV pak budou rozvíjeny v konkrétních ŠVP (školní vzdělávací program) škol podle toho, jak vývoj digitálních technologií zasahuje do jejich obsahů.

V roce 2021 Národní pedagogický institut ČR (NPI ČR) umožnil školám zapojit se do další revize RVP ZV. Školy mají v rámci této revize možnost čerpat z široké nabídky webinářů, workshopů a konzultací spojených se zaváděním nové informatiky a digitálních kompetencí do výuky.

Výzva dosáhnout změn ve výuce na všech českých školách určitě není nereálná, v této publikaci se zaměříme na jeden ze způsobů takové změny, a to, jak ICT využít při výuce matematiky. V digitálním věku také hledáme odpovědi na otázku, jak využít nové technologie ve výuce. Standardní, často užívanou metodou je již použití počítače jako „demonstračního prostředku“, umožňujícího vizualizovat procesy, které při standardní výuce nelze „křídou na tabuli“ provádět. Další možností je využít počítače při individuální práci žáků samotných. To vše se v odborné literatuře řešilo a řeší na nejrůznějších úrovních. Z českých autorů uveďme například publikaci Robové (2012) *Integrace ICT jako prostředek aktivního přístupu žáků k matematice*, ve které se autorka věnuje vývoji a současnému stavu ICT na školách v České republice a v níž představuje možnosti využití ICT technologií ve výuce matematiky. Dále jmenujme za mnohé alespoň Kutzlerovu práci (Kutzler, 2003) nebo Healyho a Sutherlandovu práci (Healy & Sutherland, 1990). Pozornost didaktiků matematiky a informatiky se dále zaměřuje k ještě sofistikovanějšímu využití počítačů. Zabývali se a stále se zabývají otázkou, zda lze dosáhnout toho, aby počítače a informační technologie obecně umožnily žákům samostatné objevování a přispěly k rozvoji jejich tvůrčí invence (Balacheff & Kaput, 1996; Balacheff et al., 2006; Binterová & Fuchs, 2010; Binterová & Tlustý, 2013; Černochová et al., 1998; Dostál, 2007; Vaníček, 2009 aj.).

Všechny aktivity digitálního materiálu *Nová Geometrie*, které v dalších kapitolách představíme, jsou vytvořeny v mezipředmětovém přístupu k výuce matematiky

[16] https://revize.edu.cz/files/rvp-zv-2021.pdf

a informatiky. Jsou volně dostupné na online platformě[17] https://www.geogebra.org/m/nrsujax4, mohou tedy sloužit jako pomoc učiteli, jako inspirace pro konkrétní realizaci malé reformy RVP ZV ve výuce matematiky nebo pro výuku v mezipředmětových vztazích. Každou aktivitu z Nové geometrie si navíc učitel může sám dále upravovat dle svého přístupu. Představují tak inspiraci pro učitele, který si uvědomuje všechny výše uvedené výzvy vzdělávání pro budoucnost, a současně jsou aktivity navrženy pro distanční formu výuky ve školách.

Distanční výuka 2020/2021 a její přínos k digitalizaci vzdělávacího procesu

Velkou výzvou pro edukační praxi v uplynulých letech bylo distanční vzdělávání. Březen roku 2020 přinesl společnosti mnoho změn, pandemie covid-19 ovlivnila nejen pracovní povinnosti či běžný život ve společnosti, ale také formy vzdělávání po celém světě. V České republice byla během pandemie uzákoněna povinnost účastnit se nově zavedené formy vzdělávání – distančního vzdělávání. Česká školní inspekce (ČŠI) zároveň od jara 2020 sledovala vývoj zavádění této nové formy vzdělávání, kterou se během prvního pololetí nepovedlo uskutečnit přibližně v 10 000 školách (Pavlas et al., 2021) a až 250 000 studentů se nemohlo online distanční výuky účastnit kvůli technickým obtížím, se školou spolupracovali prostřednictvím vzdělávacích podkladů školou zprostředkovaných. Díky intervencím škol, učitelů a zaměstnanců se podařilo tuto skupinu „nepracujících“ během jednoho roku snížit zhruba na 50 000 žáků (Pavlas et al., 2021). Poslední měsíce roku 2021 ČŠI hodnotí pozitivně, v jejich průběhu došlo k výraznému zlepšení ICT vybavení na školách a zvýšení digitálních kompetencí učitelů (Pavlas et al., 2021). Ač pandemie přinesla mnoho nepříjemného a nového, ukázala se jako efektivní a poměrně rychlá při zvyšování úrovně digitální gramotnosti v celé společnosti v porovnání s rychlostí výše zmíněných strategií. Tento výsledek zaznamenala Česká školní inspekce během svého sledování a hodnocení celého průběhu distanční výuky. Po skončení lockdownu a distanční výuky Česká školní inspekce uveřejnila tematickou zprávu s názvem: *Průběžná zpráva o vyrovnávání nerovností ve vzdělávání ve školním roce 2021/2022: Přístupy škol ke snižování dopadů pandemie nemoci covid-19*, která je výsledkem sledování a hodnocení průběhu období školního roku 2020/2021. Z obsahově široce zaměřených dotazníků a přímých řízených rozhovorů s řediteli 357 základních škol a také s přibližně 1 130 učiteli 2. stupně ZŠ[18] (ČŠI, 2021a) se mezi hlavními tématy reflexe distanční výuky vyskytla také digitalizace výuky

---

[17] Základna v softwarové i hardwarové podobě, na které pracují programy, aplikace, operační systémy, komponenty počítače, patří sem programovací jazyky, programy, editory atd., které jsou online dostupné (Hlavenka, 1997).

[18] Dotazníku se účastnilo také 102 středních škol, 1 133 učitelů 1. stupně základních škol, 996 učitelů středních škol – z nich 234 pedagogů vyučovalo na gymnáziích, 762 na středních odborných školách (ČŠI, 2021a).

a efektivní využívání digitálních technologií. „Na školách s vyšším počtem žáků bylo zaznamenáno výraznější využívání pozitivních zkušeností v oblasti úprav vzdělávacího obsahu a digitalizace.“ (ČŠI, 2021a, s. 13)

Dále ze zjištění (graf 2 Oblasti využívaných pozitivních zkušeností z distanční výuky v tematické zprávě, s. 14) vyplynulo, že 78 % ZŠ a 86 % SŠ vnímá digitalizaci výuky jako pozitivní zkušenost, kterou hodlá nadále využívat např. i při výuce prezenční (ČŠI, 2021a). Obrázek 1 níže uvádí konkrétní pozitivní zkušenosti, které během řízených rozhovorů uvedli ředitelé škol.

Distanční výuka měla klady i zápory. Mám-li vyzdvihnout nějaké pozitivum, pak ke kladům řadím: žáci, kteří chtěli, tak mohli uplatnit svoji aktivitu a tvořivost, technicky se denním používáním zdokonalili v obsluze PC, někteří se projevovali nečekaně dobře a na hodiny se připravovali poctivě (ve srovnání s prezenční výukou).

Zkušenosti jsme využili pro přesun vzdělávacího obsahu, redukce vzdělávacího obsahu, organizační změny v rozvrhu – dělení hodin, metody a formy výuky z distanční výuky do běžné výuky, využívání ICT, komunikace uvnitř školy mezi učiteli, využití forem z distanční výuky při komunikaci se zákonnými zástupci, možnosti zapojení všech žáků do výuky, možnosti pro realizaci průběžného hodnocení.

Obrázek 1: Zkušenosti ředitelů s distanční výukou (ČŠI, 2021a, s. 14)

Naším cílem při vytváření aktivit digitálního materiálu Nová Geometrie bylo navržení materiálů v prostředí GeoGebra, konkrétně v aplikaci GeoGebra Classroom, které podporuje distanční výuku, a to v její plně interaktivní formě, jak ukážeme v kapitolách 5 a 6. Domníváme se, že by tento digitální materiál mohl přispět ke zvýšení digitálních kompetencí učitelů a pomáhat v procesu plánování kurikula jak po obsahové, tak po formální stránce. Chceme tak podpořit výše uvedené zkušenosti ředitelů škol i učitelů, kteří vnímají digitalizaci výuky jako pozitivní zkušenost, a možná i přesvědčit ty, kteří zatím cestu k digitalizaci nenašli.

Učitel plánuje výuku (plánuje kurikulum, učivo), připravuje vzdělávací obsah (v rámci jedné nebo více disciplín), je realizátorem kurikula. Jeho cílem je mj. posunout žáky prostřednictvím vzdělávacího obsahu, ideové, obsahové, metodické či organizační dimenze kurikula ke zvládnutí stále komplexnějších a abstraktních klíčových znalostí a dovedností. Podle toho, jakou formu pro zprostředkování učiva zvolí, upravuje vzdělávací aktivity. V případě distanční (nebo kombinované s prezenční) výuky je minimálně část žáků v on-line (virtuálním) prostředí. Učitelova práce je jiná než při výuce prezenční. Plánované kurikulum může vykazovat určité změny. Prochází stavem projektovým (podoba v učebním plánu), prezentačním (jak je v distanční formě předkládáno žákům), komunikačním (žák je vstřebává), interiorizačním (vnitřní osvojení žáky) a aplikačním (aplikace při řešení aplikačních úloh z reálného světa). Nejprve se v následující kapitole budeme zabývat plánováním kurikula a jeho projektovým a prezentačním stavem, zejména v kontextu objasnění designu digitálního materiálu *Nová geometrie*.

2

Digitální materiál *Nová geometrie*

Výuka matematiky digitálně nebo distančně vyžaduje určitý specifický pracovní prostor, výukové prostředí, ve kterém mohou žáci pracovat samostatně i kolektivně. Příkladem takového výukového virtuálního prostředí může být materiál, který je možné současně z několika elektronických zařízení (např. tablet, počítač, notebook, smartphone) prohlížet, zároveň v něm práci kontrolovat a doplňovat diskusí s externím publikem. Díky komunikaci, která vyplývá i ze samotné tvorby digitálního materiálu, se stává činnost v takovém virtuálním výukovém prostředí kolektivní. Materiál, který disponuje těmito znaky, je pak univerzálně použitelný během libovolné formy výuky (prezenční, distanční i kombinované), vyhovuje potřebám jednotlivce a zároveň zachová komplexnost a tvořivou strukturu matematických aktivit (Choppin & Zenon, 2017). Tato kapitola představí digitální materiál[19] *Nová geometrie*. Pro jeho design a formu jsme vybraly virtuální pracovní prostředí v podobě digitálního geometrického náčrtníku matematického programu GeoGebra[20], který všechny tyto požadavky splňuje.

Tento digitální dynamický software představuje virtuální výukové prostředí, do kterého jsme implementovaly část vybrané učebnice U matematiky pro základní školy. Tento výběr byl proveden na základě mnoha aspektů: využití učebnice na základních školách v České republice, vlastní zkušenost autorek s používáním učebnice ve výuce, splnění požadavků učebnice aktuálního RVP ZV a výsledky během měření didaktické vybavenosti[21] učebnice (Průcha, 1998). Analýzu a výběr

[19] „Digitální materiály jsou dostupné v elektronické podobě, jsou využitelné přímo ve výuce bez dalších úprav. Nejčastěji se jedná o pracovní listy, prezentace, audio a video ukázky. Ideální digitální učební materiál nenahrazuje samotnou výuku, ale vhodně ji doplňuje a podporuje aktivitu žáků. Digitální učební materiály nabízejí pohled na souvislosti, kladou otázky, vyzývají k činnostem.“ (Neumajer, 2020)
„S digitálními materiály je často spojována metafora „lego“, každý digitální materiál je „kostičkou lega“, která je dílčí a lze ji různě kombinovat a upravovat dle aktuálních potřeb.“ (Wiley, 2000, volně přeloženo)

[20] Více informací o matematickém softwaru GeoGebra obsahuje kapitola 5 a podkapitoly 5.1 a 5.2 této knihy.

[21] „Měření míry didaktické vybavenosti je analytický nástroj založený na posuzování rozsahu využití strukturních, verbálních a obrázkových složek. Během výzkumu je určován výskyt jednotlivých strukturních komponentů.“ (Průcha, 1998, s. 140–142)

učebnice dále podrobněji popisují bakalářská práce (Brůžková, 2020) a diplomová práce (Brůžková, 2022).

2.1 Didaktický rámec aktivit

Geometrie na 2. stupni základního vzdělávání

Učivo Rámcového vzdělávacího programu pro 2. stupeň základního vzdělávání (Geometrie v rovině a prostoru) obsahuje následující témata či pojmy (MŠMT, 2021):

rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků)

metrické vlastnosti v rovině – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta

prostorové útvary – kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol

konstrukční úlohy – množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost, středová souměrnost

logické a netradiční geometrické úlohy (s. 37).

Toto učivo je obsahem aktivit, které jsme vybraly, a budeme s nimi dále pracovat při rozpracovávání vybraných aktivit tištěné učebnice U.

Jedním ze čtyř tematických okruhů vzdělávací oblasti RVP je Geometrie v rovině a v prostoru (MŠMT, 2021):

5.2 Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích.

V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.

Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při *nichž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.*

Žáci se učí využívat prostředky výpočetní techniky (především kalkulátory, vhodný počítačový software, určité typy výukových programů) a používat některé další pomůcky, což umožňuje přístup k matematice i žákům, kteří mají nedostatky v numerickém počítání a v rýsovacích technikách. Zdokonalují se rovněž v samostatné a kritické práci se zdroji informací (s. 30).

Z charakteristiky a očekávaných výstupů RVP (MŠMT, 2021) této vzdělávací oblasti vycházejí i naše pracovní listy, které byly postupně vytvářeny transformací zadání úloh v učebnici U. Tvořeny byly především tak, aby byly použitelné během výuky distanční, na základě doporučení ČŠI[22] a v reakci na globální digitalizaci společnosti. Věříme, že je možné je zařadit také jako součást prezenční výuky matematiky. Náš nápad digitalizovat tištěnou a rozšířenou existující učebnici matematiky je ojedinělý. Uvědomujeme si, že vzniká velké množství nových interaktivních online materiálů, kterými lze výuku všech vzdělávacích oblastí obohacovat a obměňovat, že vznikají nové učebnice, ve kterých autoři více či méně využívají ICT ke konstrukci pojmů či k ověřování znalostí. Přidanou hodnotou našich vytvořených aktivit je to, že digitalizují používané materiály, volně je modernizují, a navíc ukazují cestu pro jejich využití v distanční výuce.

2.2 Kritická místa geometrie

Než se budeme věnovat samotnému propojení informačních technologií s výukou matematiky, připomeňme si problematiku související s otázkou kritických míst ve výuce geometrie. Domníváme se, že naše materiály, které představíme v následujících kapitolách, by mohly pomáhat obtíže žáků v souvislosti s kritickými místy budování pojmů odstranit. Tato kapitola čerpá ze tří publikací, jejichž hlavním tématem jsou právě kritická místa matematiky: *Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků* (Rendl, Vondrová et al., 2015), *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (Rendl & Vondrová, 2013) a *Kritická místa matematiky základní školy: metodický materiál pro učitele* (Vondrová et al., 2015). Dvě hlavní místa geometrie, která ve výzkumech[23] vyšla jako nejvíce problematická a kritická, jsou konstrukční

[22] Úvodní kapitola této knihy.

[23] Soubor sumarizovaných výsledků z projektu GA ČR Kritická místa matematiky základní školy, analýza didaktických praktik učitelů ze tří vzájemně provázaných oblastí (1. sekundární analýza

úlohy a míra v geometrii (obsah, objem). „Problematika konstrukčních úloh se neobjevuje v mezinárodních srovnávacích výzkumech (protože tam žádné úlohy konstrukčního typu nejsou zařazovány), ani jim není věnována prakticky žádná výzkumná pozornost, a to ani v zahraničí. Učitelé 1. i 2. stupně však konstrukční úlohy opakovaně zmiňovali jako problematické místo a zdůrazňovali jejich důležitost v rámci školské geometrie." (Rendl, Vondrová et al., 2015, s. 15–16) I proto jsme pro digitalizaci vybraných témat učebnice U zvolily právě konstrukční úlohy, které jsme přichystaly v elektronické podobě v multiplatformním dynamickém softwaru GeoGebra, ve kterém jsou transformované úlohy umístěny. Učitel, žák, čtenář této publikace má prostřednictvím jejich řešení možnost seznámit se s dynamickou geometrií, která slouží ke snadné simulaci geometrických konstrukcí v rovině či v prostoru. Tyto konstrukce jsou na rozdíl od konstrukcí „tužka, papír" pohyblivé a interaktivní. Rýsování „tužka, papír" je v nich automatizováno, což umožňuje v kratším časovém úseku stihnout mnohem více konkrétních konstrukcí a soustředit se více na samotný postup konstrukce, který bývá pro žáky kritický.

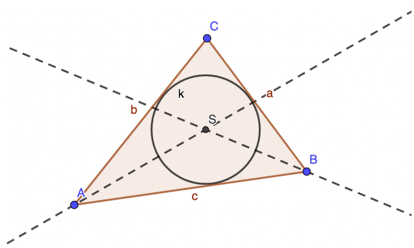
Konstrukční úlohy

Co jsou konstrukční úlohy a proč je stále zařazujeme do výuky? V těchto úlohách je žákovým úkolem konstruovat geometrický objekt na základě předem zadaných vlastností, hodnot. Na druhém stupni základní školy se žák setkává s konstrukcí geometrických útvarů, s konstrukcí obrazců v osové nebo středové souměrnosti anebo s konstrukcemi množin bodů daných vlastností. Jednou z hlavních příčin problematiky, která u těchto konstrukcí vzniká, je kognitivní konflikt mezi dvěma proti sobě jdoucími požadavky: „Jak odlišit reprezentovaný objekt od použité sémiotické reprezentace, pokud nelze získat přístup k matematickému objektu jinak než díky sémiotickým reprezentacím? Schopnost přecházet mezi systémy reprezentací je tedy často problematická a ovlivňuje proces učení a řešení problémů." (Duval, 2006, s. 107 in Rendl, Vondrová et al., 2015, s. 134). Geometrické objekty jako např. mnohoúhelníky, přímky, kružnice atd. jsou abstraktní povahy, pokud je žák znázorní prostřednictvím obrázku, může se jednat pouze o jejich nedokonalou reprezentaci, mají totiž nejednoznačnou roli. Labordeová (2005) ve své knize rozlišuje prostor geometrických objektů (theoretical) a vztahů a prostor prostorově-grafických entit (spatio-graphical). Teoretický prostor odkazuje na

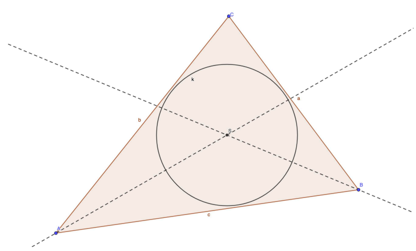
---

výsledků mezinárodního srovnávacího výzkumu TIMSS 2007 z matematiky pro 8. ročník (Rendl, Vondrová, 2015), analýza obecných výsledků TIMSS z jiných let a výzkumu PISA; 2. výsledky hloubkových rozhovorů se zkušenými učiteli ZŠ; 3. kvantitativní šetření formou online dotazníku pro učitele 1. stupně a učitele matematiky žáků nižších sekundárních škol).

vlastnosti ideálních geometrických objektů, vět. Prostor prostorově grafický (reprezentace) je vymezen pro rýsování či kreslení obrázku. „Někteří žáci tyto prostory neodlišují, když mají např. narýsovat kružnici vepsanou trojúhelníku, nehledají body dotyku korektně na kolmici ze středu kružnice na stranu trojúhelníku, ale vezmou do kružítka poloměr odhadem.“ (Rendl, Vondrová et al., 2015, s. 134) Tento problém by mohl být alespoň částečně vyřešen tím, že poté, co špatně např. kružnici vepsanou zkonstruují, mají za úkol své řešení převést do programu GeoGebra nebo podobného softwaru. Chybovost svého řešení zde velice jednoduše ověří pomocí přiblížení *Nákresny*[24]. Pro ilustraci jsou uvedeny snímky obrazovky konkrétního odhalení chybného „rýsování odhadem“. Obrázek 2 zachycuje konstrukci, která by se mohla na první pohled zdát správná, nicméně obrázek 3 potvrzuje, že se kružnice stran trojúhelníku nedotýká, a není tedy kružnicí vepsanou tomuto trojúhelníku. Tato zkušenost žáka vede k zamyšlení se nad problémem, následně by měl být naveden ke správnému způsobu konstrukce kružnice vepsané, prostor grafický tak propojí s prostorem teoretickým.



Obrázek 2: Konstrukce na pohled správná, GeoGebra, (Nikola Brůžková, [14.10.2022])



Obrázek 3: Konstrukce po zoomu detailu, GeoGebra, (Nikola Brůžková, [14.10.2022])

Zmíněný způsob, jak žákovi ukázat cestu k nalezení správného řešení, je úzce spjat s poznávacím procesem, který uvádějí Hejný a Kuřina ve své publikaci (2009). Poznávací proces zahrnuje postup začínající motivací, izolovaným modelem (1. stupeň procesu – kružnice vepsaná), který se pomocí 1. abstrakčního zdvihu stává modelem univerzálním (2. stupeň procesu – kružnice vepsanou lze vepsat libovolnému trojúhelníku) a pomocí 2. abstrakčního zdvihu abstraktní znalostí

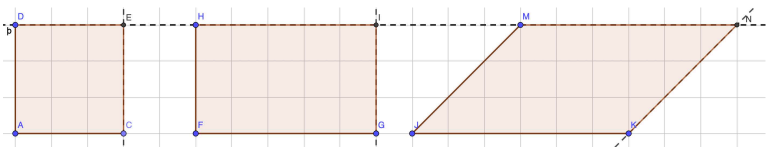
[24] Okno aplikace, ve kterém žák sestrojuje objekty, může s nimi pohybovat a libovolně je upravovat.

(3. stupeň procesu – její poloměr musí být kolmý na stranu trojúhelníku) (Hejný & Kuřina, 2009).

Důležitou roli u konstrukčních úloh hraje také „prototyp geometrického objektu". (Hershkowitz, 1990 in Fujita, 2012, s. 62) „Prototypem je takový příklad pojmu, který žáci nejčastěji vybírají jako reprezentanta dané kategorie jako jediný nebo první." (Rendl, Vondrová et al., 2015, s. 136). Pokud byste před žáky dali např. obrázek 4 a zadali úkol: Vyberte z obrázků rovnoběžník. Jaký geometrický útvar by vaši žáci volili?

Obrázek 4: Rovnoběžníky, GeoGebra, (Nikola Brůžková, [14.10.2022])

Pokud by zvolili poslední objekt v řadě, stal se u nich kosodélník prototypem rovnoběžníku, matematický software by tedy mohl pomoci žákům oprostit se od prototypů a objevit teoretický prostor pojmu rovnoběžník, a to např. pomocí appletu *Rovnoběžník*, který je online dostupný na https://www.geogebra.org/m/su8bpxqn. Body A, B a D jsou pohyblivé a objekt během libovolného pohybu těchto bodů stále zůstává rovnoběžníkem, dvojice protilehlých stran zůstávají vždy rovnoběžné (viz obrázek 5), žák má možnost prohlédnout si několik desítek reprezentací rovnoběžníku, mezi kterými nalezne právě i čtverec a obdélník. Použití appletu dále otevírá i diskusi na téma vlastnosti rovnoběžníku.



Obrázek 5: Reprezentace rovnoběžníku, GeoGebra, (Nikola Brůžková, [15.10.2022])

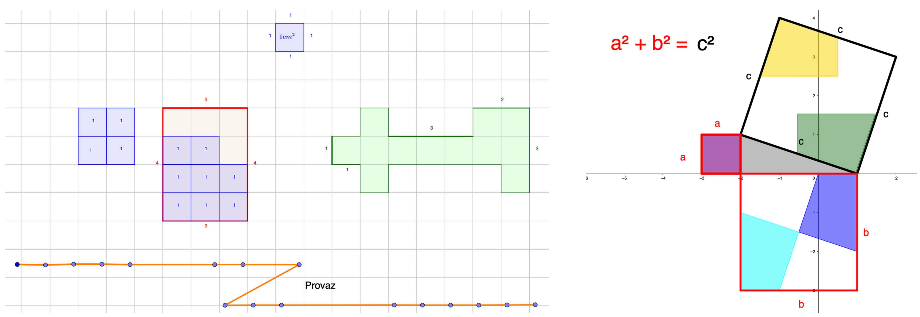
Podobným příkladem prototypu bývá pravoúhlý trojúhelník, jehož pravý úhel bývá nejčastěji v levém dolním rohu (Rendl, Vondrová et al., 2015).

Fakt, že použití programů dynamické geometrie přispívá k porozumění žáků geometrii, potvrdily také výsledky online dotazníku pro učitele 2. stupně základní školy týkající se konstrukčních úloh, 85 % ze 164 respondentů s tímto výrokem souhlasilo. I přesto 58 % z 245 respondentů s výrokem „Programy dynamické geometrie ve své výuce používám" nesouhlasilo (Rendl, Vondrová et al., 2015, s. 139, tab. 3.2).

Nezastupitelnou roli hraje v geometrii rýsování klasickými rýsovacími prostředky, tuto roli neopomíjíme. Aktivity, které představíme dále, digitalizují úlohy, které můžeme řešit klasicky rýsováním na papír nebo v geometrickém náčrtníku, a navíc jsou vhodné pro výuku distanční či samostudium žáků.

Míra v geometrii

Ještě zmíníme jeden pojem, který budeme při tvorbě digitalizovaných aktivit využívat, pojem míra. Mírou v geometrii budeme rozumět měření ploch a měření délky, míra úhlová součástí této kapitoly není. Dle RVP by měl absolvent ZŠ „odhadovat a vypočítat obsah, obvod základních rovinných útvarů, objem a povrch těles“. (MŠMT, 2021, s. 36) Z výzkumů uvedených v publikacích (Rendl & Vondrová, 2013; Rendl, Vondrová et al., 2015; Vondrová et al., 2015) zmíněných na začátku kapitoly 3.2 této knihy vyplynulo, že většina obtíží žáků v míře v geometrii se týká pojmu obsah. Kritická místa se objevila ve všech čtyřech krocích pojmotvorného procesu míry v geometrii, kam patří: „Zachování (konzervace) míry, jednotka míry, numerické procesy, algebraická reprezentace.“ (Battista, 2007, s. 843–908) Problematiku zachování obsahu zkoumali také Kyshová a Kami (2006), z výzkumu vyplynulo, že se třetina respondentů domnívá, že dojde ke změně obsahu při změně útvaru. Žákům je v této problematice možné pomoci variabilními aktivitami, ve kterých mohou samostatně reálně vyzkoušet, že se obsah při změně útvaru nemění. Několik aktivit zaměřených na toto kritické místo čtenář nalezne i v této naší knize. Všechny pracují s možností, kterou dynamická geometrie nabízí, tedy s přeskládáním objektů z jednoho místa na druhé.



Obrázek 6: Přeskládání geometrických objektů, GeoGebra, (Nikola Brůžková, [16.10. 2022])

Obrázek 6 ilustruje dvě z aktivit, které v knize naleznete dále. První z nich pracuje se čtvercovou sítí, do druhé je navíc zakomponován důkaz Pythagorovy věty s možností reálně vyzkoušet její platnost. Tyto aktivity zároveň mohou pomoci vyvrátit nesprávné představy: „Stejný obsah znamená shodnost příslušných útvarů, a mají-li útvary stejný obsah, musí mít stejný i obvod, a naopak," kterou objevili Kospentaris, Spyrou a Lappas (2011) během svého výzkumu u studentů základních, středních i vysokých škol. Podobné představy se potvrdily i u studentů, které zkoumal Babai et al. (2006). Kritickým místem *jednotka míry* se ukázalo použití nestandardní jednotky na pokrytí roviny, tedy využití jiného geometrického útvaru než čtverce. Pokud měli žáci použít např. obdélníky, trojúhelníky nebo jiné útvary, úspěšnost byla mnohonásobně nižší. Dynamická geometrie nabízí nespočet invariant použitelných jako jednotka na pokrytí roviny, jako ukázka nestandardní jednotky může sloužit aktivita z obrázku 6 vpravo, kde má žák za úkol umístit nepravidelné čtyřúhelníky a čtverec tak, aby vyplnily černý čtverec se stranou c. Obrázek 6 vlevo je ukázkou, jak alespoň částečně pomoci žákům, pro které je kritickým místem algebraická reprezentace, tzn. „pletou vzorce pro obsah a obvod". (Rendl, Vondrová et al., 2015, s. 261).

2.3 Matematický software dynamické geometrie

Již v úvodu jsme se zmiňovaly o využití počítače, ICT ve výuce matematiky. Pro digitalizaci učebnice U jsme vybraly oblast geometrie, proto v této souvislosti vysvětlíme související pojem dynamická geometrie. Tento termín se objevil s příchodem nových technologií a označuje interaktivní geometrii na počítači. Jedná se o obohacení školské geometrie vyučované formou „tužka a papír", která v procesu výuky geometrie hraje nezastupitelnou roli, rozvíjí např. jemnou motoriku. Pokud ale žák zvládá klasické rýsování, je vhodné seznámit ho s dalšími možnostmi konstrukcí, které moderní formy výuky nabízejí. Dynamická geometrie je produktem tzv. DGS (Dynamic geometry systems) programů, které vizualizují, zrychlují a částečně automatizují procesy klasického rýsování. Toto zrychlení a automatizace umožňuje stihnout vysvětlit, narýsovat, vizualizovat (např. během vyučovací hodiny) více konkrétních konstrukčních úloh, navíc umožňují žákům všechny objekty rozpohybovat a prohlédnout si tak velké množství konkrétních geometrických objektů, odlišných od známých prototypů. „Znázornění geometrického objektu na počítači je přesné a umožňuje okamžitý vhled bez nároku na vysoký stupeň představivosti, s touto pomůckou může žák svou představivost trénovat." (Vaníček, 2015).

Využívat dynamickou geometrii, tj. zobrazovat geometrické objekty na obrazovce, nám umožňují počítačové programy, softwary. Patří mezi ně např. GeoGebra, Cabri, Kig, Geolog, C. a R., CaRMetal a mnoho dalších. Naše digitalizované aktivity jsou vytvořeny pomocí dynamického geometrického náčrtníku programu GeoGebra.

GeoGebra je multiplatformní dynamický matematický software, který je využitelný pro všechny úrovně vzdělání. Zakladatelem programu GeoGebra je Markus Hohenwarter. Software získal mnohá ocenění nejen v německy mluvících zemích, ale také v USA i v Evropě. Nyní má již GeoGebra 16 ocenění a širokou komunitu uživatelů z celého světa. Dynamicky spojuje geometrii, algebru, tabulky, grafy a statistiky, kalkulačku a další do jednoho velice jednoduše použitelného programu. Jeho výhodou je veřejná online dostupnost na webové platformě a stažitelnost formou aplikace do všech chytrých elektronických zařízení. Je možné ji tedy využívat nejen ve škole, ale i doma nebo na cestách (Furner & Marinas, 2020). GeoGebra si získala mezinárodní rozsáhlou komunitu uživatelů a vývojářů z celého světa. Využívána je více než ve 190 zemích a její překlad byl pořízen již do více než 55 různých jazyků (Hohenwarter et al., 2009).

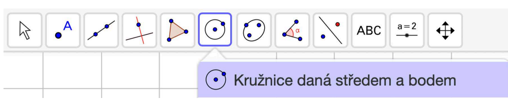
3

Aktivity pro výuku geometrie ve virtuálním prostředí

Tato kniha představuje dva soubory pracovních listů. První soubor pracovních listů je uveden přímo v této knize v kapitolách 5.1–5.20, jedná se o pracovní listy pro učitele. Druhý soubor pracovních listů pro žáky se nachází na https://www.geogebra.org/m/nrsujax4, jde o digitální materiál zpracovaný v programu GeoGebra, softwaru dynamické geometrie. Oba soubory vznikly rozšířením a digitalizací vybraných kapitol učebnice U. V této kapitole se budeme věnovat návodu, jak tyto soubory využívat ve výuce, zmíněny budou relevantní odkazy pro případ, že čtenář naší knihy je začátečníkem v užívání programu GeoGebra. Pak popíšeme jednu z GeoGebra platforem, do které může vyučující převést všechny dále uvedené aktivity, tou je prostředí pro virtuální a distanční výuku GeoGebra Classroom. Potom se již budeme podrobně věnovat vysvětlení, popisu cílů, obsahu a ztvárnění jednotlivých aktivit, které učebnici U rozpracovávají do moderní podoby výuky s využitím ICT.

Vysvětlivky

Formát písma: V textu knihy kapitol 3.1 až 5.20 využíváme kurzívu a velké písmeno na začátku slova či slovního spojení k označení pojmů, které uživatel nalezne a bude používat přímo v GeoGebra appletech[25], jako příklad uvádíme obrázek 7. Ten zobrazuje část *Panelu nástrojů*, který uživatel najde v levé horní části GeoGebra appletů. Označen je nástroj *Kružnice daná středem a bodem* (použití kurzívy a velkého písmena na začátku k určení jednoznačnosti významu tohoto slovního spojení).



Obrázek 7: Panelu nástrojů programu GeoGebra (dostupné z: https://www.geogebra.org/m/zwbyag58#material/uvv6efcb, [Nikola Brůžková, 18.10.2022])

[25] *„Softwarová komponenta, která je uzpůsobena na konkrétní úkol. Obvykle pochází z jiné větší aplikace nebo softwarové platformy (v případě této knihy z aplikace GeoGebra) a má omezenou funkčnost. Z důvodu omezené funkčnosti nevyžaduje mnoho systémových prostředků, proto funguje rychle a spolehlivě (Nádběla, 2006).“*

3.1 GeoGebra návod pro začátečníky

Pokud jste doposud neměli možnost s GeoGebrou pracovat a chtěli byste ji do své výuky začlenit, doporučujeme nejprve navštívit webovou stránku https://www.geogebra.org/m/BpECac4X, na které naleznete návody pro začátečníky. Návody obsahují nejen slovní instrukce, ale také interaktivní applety, díky kterým si můžete jednotlivé GeoGebra nástroje a funkce přímo vyzkoušet. V případě, že se pro využití GeoGebry ve výuce rozhodnete, je důležité vytvořit GeoGebra účet, který slouží jako uložiště všech GeoGebra materiálů, jež upravíte, uložíte či vytvoříte. Registrace je poměrně snadná, budete k ní potřebovat pouze mailovou adresu a heslo, vytvořit svůj účet můžete na https://accounts.geogebra.org/user/create/expiration/129600/clientinfo/website.

3.2 GeoGebra Classroom návod pro začátečníky

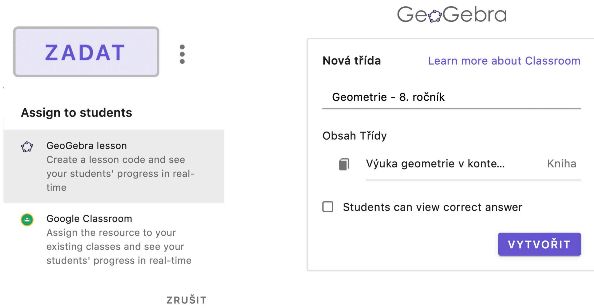
Všechny aktivity kapitol 5.1–5.18 lze žákům zadat pomocí funkce GeoGebra Classroom (dále *Třída*). Žáci díky této funkci mohou na aktivitách pracovat samostatně či skupinově. Jejich práce je v reálném čase monitorována, ze strany vyučujících může být libovolně korigována a po dokončení také vyhodnocena. Pokud jste se tedy rozhodli digitální materiál využít během výuky, doporučujeme ho z důvodu zvýšení efektivity procesu *učení se* zadat právě v prostředí *Třídy*.

„Jak zadat aktivitu do *Třídy*?“ Nejprve vyučující vybere jeden z pracovních listů pro žáky, dostupných na https://www.geogebra.org/m/nrsujax4, který odpovídá probíranému či již probranému učivu. Po otevření aktivity se zobrazí interaktivní pracovní list pro žáky. Pokud odpovídá požadavkům vyučujícího, stačí pouze v pravém horním rohu kliknout na tlačítko *ZADAT*. Po kliknutí se zobrazí první vyskakovací okno[26], vyučující vybere z nabídky *GeoGebra lekci* (*GeoGebra lesson*). Po výběru se objeví druhé „vyskakovací“ okno, do kterého vepíše název *Třídy* a vybere, zda mají/mohou studenti vidět správné odpovědi (*Students can view correct answer*[27]). Poté se zobrazí stránka obsahující kód a odkaz. Jednu z těchto informací je nutné žákům nasdílet, ti se díky kódu (ten mohou zadat na stránce

[26] „Termín vyskakovací okno neboli pop-up window označuje specifický formát, který se objeví „nad“ obsahem stránky v popředí a částečně nebo úplně ji překryje. Ta přestane být aktivní a uživatel musí vykonat nějakou akci přímo ve vyskakovacím okně, aby mohl pokračovat v jejím prohlížení.“ (Mioweb slovníček webových pojmů. Vytvořte web, který pracuje za vás [online]. Dostupné z: https://www.mioweb.cz/slovnicek/pop-up-okno/)

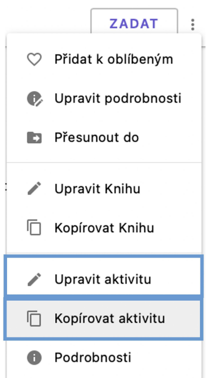
[27] **Metodický komentář**: Při výběru *Students can view correct answer* a spuštění *Třídy* je žákům ihned po výběru odpovědi na uzavřenou otázku sděleno, zda je či není správná. V případě, že odpověď není správná, mohou ji až třikrát změnit. Doporučujeme správné odpovědi nezobrazovat, v aktivitách

https://www.geogebra.org/classroom) či odkazu připojí do *Třídy*. Podrobný námi přeložený návod obsahující další informace o funkcích a možnostech *Třídy* nalezne čtenář na https://www.geogebra.org/m/gvb3mahj, nebo si může prohlédnout rychlý obrázkový návod níže (obrázek 8).



Obrázek 8: Obrázkový návod – Zadání aktivity do GeoGebra Třídy, [Nikola Brůžková, 08.01.2023]

Pokud pracovní list pro žáky neodpovídá požadavkům vyučujícího, je možné ho libovolně upravit (nový úkol přidat nebo některý z původních odstranit). Stačí v pravém horním rohu kliknout na ikonu tří teček vedle tlačítka *ZADAT* a z nabídky vybrat *Kopírovat aktivitu*. Aktivita se přesune na profil uživatele, kde je možné ji libovolně upravit pomocí ikony tří teček vedle tlačítka *ZADAT* (viz obrázek 9).



Obrázek 9: Návod – úprava GeoGebra pracovního listu, [Nikola Brůžková, 08.01.2023]

5.1–5.18 mají žáci u uzavřených otázek na výběr z 3–5 možných odpovědí, některé otázky by tedy při opakované možnosti opravy postrádaly smysl.

4

Pracovní listy pro žáka

Pro tuto publikaci bylo pro žáky připraveno 20 online pracovních listů, které jsou dostupné na https://www.geogebra.org/m/nrsujax4. Pracovní listy obsahují 112 interaktivních appletů, 143 jednotlivých úkolů a přes 150 otevřených a uzavřených otázek. Zadání a otázky byly částečně transformovány, částečně převzaty z učebnice U. Interaktivní applety, které jsou představeny v kapitolách 5.1–5.20, vznikly v aplikaci GeoGebra Classic. Každý z appletů byl individuálně vytvořen tak, aby obsahoval pouze nástroje a funkce, které jsou nezbytně nutné pro vykonání konkrétního úkolu aktivity. Důvodem omezení funkčnosti vytvořených appletů je především jednoduchost uživatelského ovládání a postupný proces učení se GeoGebra funkcím a nástrojům žáky. Aplikace GeoGebra Classic obsahuje totiž několik zobrazovacích prostředí, v nichž je možné pracovat: *Grafy*, *CAS*, *Geometrie*, *3D Grafika*, *Tabulka*, *Pravděpodobnost* a *Zkouška*, přičemž interaktivní applety této knihy využívají prostředí *Grafy*, *Geometrie* a *3D Grafika*. Všechna zobrazovací prostředí, jejich složení a funkce jsou detailně popsány v návodu dostupném na https://www.geogebra.org/m/zwbyag58.

Zadání pracovního listu žákům do *Třídy* provede učitel otevřením webového odkazu uvedeného u příslušného pracovního listu pro učitele v kapitolách 5.1–5.20 dle návodu uvedeného v kapitole 3.2. Vypracování jednoho žákovského pracovního listu je odhadováno na 35–45 minut, tedy jednu vyučovací hodinu. Žák pracuje v online prostředí GeoGebra, vzdělává se tedy nejen v oblasti geometrie, ale také se učí pracovat s matematickým softwarem[28]. Poté, co splní úkoly v interaktivních appletech, odpovídá na přidružené otevřené a uzavřené otázky. K nalezení odpovědi ho vede vlastní tvorba v interaktivním appletu, která vychází z tzv. desatera konstruktivismu[29] (Hejný & Kuřina, 2015).

[28] „Žáci k modelování geometrických útvarů a těles využívají dynamický software, který přispívá k porozumění geometrickým vztahům a vlastnostem útvarů a také podporuje osvojení geometrických dovedností pro rozvoj prostorové představivosti (Revize RVP, (n.d.)).

[29] Konstruktivistický přístup ve výuce matematiky vychází z takzvaného desatera, které obsahuje aktivitu, řešení úloh, konstrukci poznatků, zkušenosti, podnětné prostředí, interakci, reprezentaci strukturování, komunikaci, vzdělávací proces a formální poznání. Vzdělávací proces v matematice pak hodnotíme na základě tří hledisek: porozumění, zvládnutí matematického řemesla a aplikace matematiky. Pro samotné porozumění jsou nejdůležitější představy, pojmy, postupy a souvislosti,

které zmiňuje právě i Bloomova taxonomie. Aplikace tohoto desatera by měla následně pomoci žákům budovat schopnost samostatného a kritického myšlení a chuť poznávat, bádat a konstruovat (Hejný & Kuřina, 2015).

Bloomova taxonomie shrnuje cíle učebního procesu jednotlivých předmětů a je univerzálně použitelná pro všechny. Odpovídá obecně na otázky: Co je důležité žákům předat? Jak je provázet vzděláváním? Jak a za co je hodnotit? Jak cíle, pokyny a hodnocení vzájemně sjednotit? (Anderson & Krathwohl, 2001).

5

Pracovní listy pro učitele

V podkapitolách 5.1–5.20 nalezne čtenář 20 pracovních listů pro učitele. U každého pracovního listu (dále PL) jsou pro čtenáře zmíněny následující informace: popis aktivity; odkaz na PL pro žáky; učivo; metodický komentář; časová dotace a očekávané výstupy v matematice. V této kapitole shrneme doplňující informace, které jsou platné pro všechny pracovní listy pro učitele.

Cílová skupina: Digitální pracovní listy, dostupné na https://www.geogebra.org/m/nrsujax4, jsou určeny pro žáky ve věku 13–14 let (tzn. pro 8. ročník základních škol), použity mohou být i pro 7. nebo 9. ročník ZŠ jako např. opakování geometrie 8. ročníku, za účelem rozvoje nadaných žáků 7. tříd nebo seznámení se se softwarem dynamické geometrie.

Potřebné pomůcky: Aby mohl učitel práci s PL žákům zadat, potřebuje buď jedno promítací vizuálně dostupné zařízení pro celou třídu (např. interaktivní tabule, dataprojektor . . .), nebo několik elektronických zařízení s obrazovkou o uhlopříčce alespoň 17 cm (např. tablet, notebook, počítač s monitorem . . .). Použití zařízení s menším displejem může žákům znemožnit konstrukce v některých interaktivních appletech nebo omezit některé funkce digitálních pracovních listů.

Forma práce: Pracovní list může vyučující promítnout celé třídě, pracují tedy hromadně. Nebo ho může zadat pomocí *Třídy* (kapitola 3.2) a dle počtu dostupných elektronických zařízení zvolit práci skupinovou či samostatnou.

Očekávané výstupy v matematice: Z očekávaných výstupů byly u každého pracovního listu vybrány ty, na které daná aktivita cílí. Pro přehlednost uvedeme všechny očekávané výstupy sekce Geometrie v rovině a prostoru, 2. stupeň (MŠMT, RVP ZV, 2021) pomocí obrázku 10. V následujících kapitolách 5.1–5.20 budeme využívat pouze číselné označení konkrétních výstupů (např. M-9-3-01).

Komentář k očekávaným výstupům: Vzhledem k širokému spektru kombinovaných činností žáka a individualitě každého žáka při práci s aktivitou je pravděpodobné, že některé z vybraných očekávaných výstupů u jednotlivých pracovních listů nebudou naplněny, nebo naopak budou naplněny výstupy, které zmíněny nejsou.

GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU

Očekávané výstupy

žák

M-9-3-01	***zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku***
M-9-3-02	***charakterizuje a třídí základní rovinné útvary***
M-9-3-03	***určuje velikost úhlu měřením a výpočtem***
M-9-3-04	***odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů***
M-9-3-05	***využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh***
M-9-3-06	***načrtne a sestrojí rovinné útvary***
M-9-3-07	***užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků***
M-9-3-08	***načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar***
M-9-3-09	***určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti***
M-9-3-10	***odhaduje a vypočítá objem a povrch těles***
M-9-3-11	***načrtne a sestrojí sítě základních těles***
M-9-3-12	***načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině***
M-9-3-13	***analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu***

NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY

Očekávané výstupy

žák

M-9-4-01	***užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací***
M-9-4-02	***řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí***

Obrázek 10: RVP ZV, 2021, dostupné z: https://revize.edu.cz/files/rvp-zv-2021-s-vyznacenymi-zmenami.pdf, MŠMT, 2021, Matematika a její aplikace, 2. stupeň, s. 36–37 [16.02.2023]

Rozvoj digitální kompetence v matematice: Při skupinové či samostatné práci žák v pracovních listech: *„Používá digitální zařízení při učení, upravuje digitální obsah, využívá digitální technologie, aby si usnadnil práci, zautomatizoval rutinní činnosti, zefektivnil či zjednodušil své pracovní postupy (MŠMT, RVP ZV 2021, s. 13, [cit. 16.02.2023]).“ „Žáci k modelování geometrických útvarů a těles využívají dynamický geometrický software, který přispívá k porozumění geometrickým vztahům a vlastnostem útvarů a také podporuje osvojení geometrických dovedností a rozvoj prostorové představivosti.“* (MŠMT, NPI ČR, 2023, dostupné z: https://revize.edu.cz/clanky/matematika-a-jeji-aplikace-2-stupen, [cit. 16.02.2023]).

Očekávané výstupy v rozvoji digitální kompetence v matematice: Tyto výstupy může učitel zařadit do revidovaného školního vzdělávacího programu do září roku 2024 při začlenění libovolného geometrického softwaru nebo pracovních listů této knihy do výuky. *„Žák modeluje konkrétní situace a účelně používá digitální technologii při řešení rutinních problémů, načrtne a sestrojí rovinné útvary, účelně používá geometrický software, načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině, účelně používá geometrický software k manipulaci s modely těles*"(MŠMT, NPI ČR, 2023, dostupné z: https://revize.edu.cz/clanky/matematika-a-jeji-aplikace-2-stupen, [cit. 16.02.2023]).

5.1 Pracovní list pro učitele 1 – Pražský orloj

Kapitola: 1. Rovinné útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma kružnice a kruh kolem nás

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/fu8rch36

Učivo: Rovinné útvary – kružnice, kruh, úhel, Konstrukční úlohy – druhy úhlů, množiny bodů dané vlastnosti

Časová dotace: 35 min

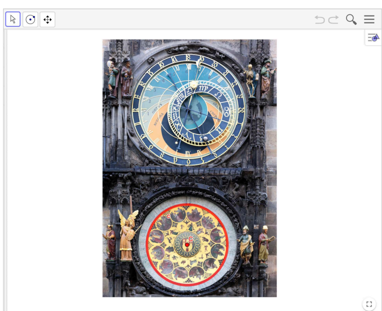
Metodický komentář: V této aktivitě práce začíná čtením úvodního textu, který se vztahuje k historii a stavbě oblíbené pražské památky orloje. Po přečtení textu žáci pracují s interaktivními applety. V prvním a druhém appletu je vyobrazen orloj a jeho zjednodušený GeoGebra model. Žáci mají možnost spustit animaci pohybu hodinové ručičky na orloji a pohyb sledovat, applet b) zahrnuje funkci *Zobrazit stopu*, pomocí které je vykreslena kružnice. Applet tedy zobrazuje množinu bodů dané vlastnosti – kružnici. Žáci následně odpovídají na otázky týkající se vlastností rovinných útvarů kružnice a kruhu. V úvodním textu 3 jsou seznámeni s historií měření času, hodiny si následně samostatně sestrojí. PL obsahuje také měření vnitřních úhlů kruhových výsečí.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-03, M-9-3-05, M-9-3-06, M-9-3-13, M-9-4-01

Zadání pro učitele s řešením

Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)

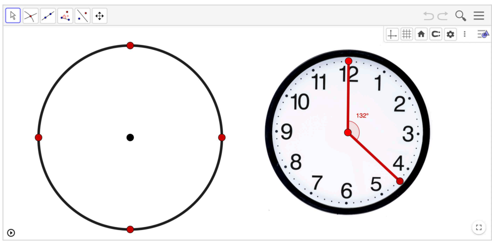


Obrázek 11: Pražský orloj 1 (PL 1), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet b)

Obrázek 12: Pražský orloj 2 (PL 1), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet c)



Obrázek 13: Nástěnné hodiny (PL 1), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1a)

Na Staroměstském náměstí v Praze je velice oblíbenou turistickou atrakcí Staroměstský orloj, který vznikl začátkem 15. století, tedy v období, kdy se na našem území pohyboval Mistr Jan Hus. Jeho matematický a astronomický model navrhl Jan Ondřejův, kterému přezdívali Šindel. Zabýval se matematikou a astronomií na pražské univerzitě. Orloj je umístěn na jižní straně věže Staroměstské radnice a je složen ze dvou velkých ciferníků, horního astronomického a dolního kalendářního (Křížek et al., 2009; Horský, 1988; Odvárko & Kadleček, 2013).

Úkol 1a)

V appletu a) vidíte obrázek Pražského orloje, obrázek si prohlédněte. Kde na obrázku vidíte kruh nebo kružnici? Jednu kružnici máte v obrázku již vyznačenou červeně. Použijte nástroj *Kružnice daná středem a bodem* a další kružnice pomocí něj označte. Kolik kružnic a kruhů jste v appletu a) našli?

Návod a)

a) Z nabídky vyberte nástroje *Kružnice daná středem a bodem* .
b) Klikněte na místo v appletu, které považujete za střed kružnice. Ten se po umístění zobrazí.
c) Poté se od umístěného středu vzdalujte až na hranici kružnice, kterou chcete označit. Tam klikněte a umístěte bod, kterým bude kružnice procházet.
d) Až budete mít kružnici sestrojenou, klikněte na nástroj *Ukazovátko* . Tím ukončíte proces konstrukce.

Úvodní text 2b)

„Pod astronomickým ciferníkem se nachází kalendářní deska, lze z ní vyčíst aktuální měsíc, den a nepohyblivé svátky křesťanského kalendáře. Po odvodu desky je úzké mezikruží s 365 paprsky. Navrhl a namaloval ji Josef Mánes, který tuto zakázku považoval za prestižní, a snažil se pro Prahu vytvořit monumentální dílo. Zcela osobitě pojal na desce znamení zvěrokruhu, použil u nich zlaté pozadí, vyobrazená zvířata doplňují malé postavičky tzv. putti (Křížek et al., 2009; Horský, 1988; Odvárko & Kadleček, 2013)."

Úkol 2b)

V appletu b) vidíte obrázek kalendářní desky. Pravým tlačítkem myši klikněte na **bod** *E*, z vyskakovací nabídky, která se objeví, vyberte možnost *Zobrazit stopu*. Poté klikněte na ikonu *Přehrát* v levém dolním rohu a pozorujte. Jaký útvar stopa vykreslila? Pokuste se tento jev svými slovy vysvětlit.

Úvodní text 3c)

První hodinky vznikly kolem roku 1511, byly válcového tvaru a celé ze železa. Jako první je sestrojil zámečník Peter Henlein z Norimberku, když nahradil doposud používaná těžká závaží pro chod hodin pružinou (perem). Tyto hodinky odbíjely každou hodinu a dokázaly jít den a půl, minutovou ručku dostaly hodinky ke konci 17. století (Kynčl, 2008).

Úkol 1c)

Představte si, že jste hodináři, a pokuste se podle předlohy rozdělit kružnici/kruh na 12 shodných částí. K dispozici máte nové nástroje, jedním z nich je *Úhel dané velikosti* , práce s ním je poměrně jednoduchá, nejprve kliknete na jeden z oranžových bodů, následně na vrchol úhlu (bod *S*), poté určíte velikost úhlu a jeho směr. Pomoci vám může také animace, která je v appletu c) k dispozici.

Tahem můžete libovolně pohybovat bodem H. Spustit lze také animaci kliknutím na tlačítko *Přehrát* v levém dolním rohu.

Otázka 1c)

Zapište svůj postup při dělení prázdného ciferníku na 12 shodných částí. Jaké nástroje jste z nabízených při konstrukci využili?

Otázka 2c)

Jakou velikost vnitřního úhlu jste zvolili, abyste rozdělili hodiny na 12 shodných částí?

Otázka 3c)

Jaký úhel opíše minutová ručička po 30 vteřinách?

Otázka 4c)

Jaký úhel opíše hodinová ručička po 15 minutách?

Řešení:

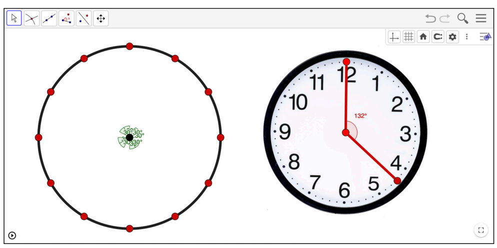
Úkol 1a)

V appletu mohou žáci najít až 40 kružnic či kruhů. Nabízí se diskuzní otázka, které z nich považují za kružnice, které za kruhy a proč. Své výsledky mohou žáci porovnat mezi sebou a navzájem si k nalezení zbylých kružnic/kruhů pomoci.

Úkol 2b)

Stopa v appletu vyznačí množinu všech bodů, které jsou od středu vzdálené o poloměr, tzn. kružnici.

Applet c)



Obrázek 14: Řešení applet c) (PL 1), GeoGebra, (Nikola Brůžková [22.02.2023])

Otázka 1c)

Postup dělení kruhu na 12 shodných částí se u žáků může lišit. Použít mohou např. nástroj *Úhel dané velikosti*, který opakovaně použijí ke konstrukci úhlu o velikosti 30°. K dispozici mají i další nástroje: *Přímku*, *Průsečík* či *Osovou souměrnost*, úhlů o velikosti 30° mohou sestrojit pouze několik a zbylé body poté najít např. pomocí nástroje *Osová souměrnost*. Své kreativní konstrukce mohou sdílet se svými spolužáky a diskutovat o jejich správnosti.

Otázka 2c)

A) 30°

Otázka 3c)

B) 180°

Otázka 4c)

D) 90°

5.2 Pracovní list pro učitele 2 – Hledání pokladu

Kapitola: 1. Rovinné útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma kružnice a kruh

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/qmc9nz2g

Učivo: Rovinné útvary – úsečka, kružnice, kruh, Konstrukční úlohy – množiny bodů dané vlastnosti

Časová dotace: 45 min

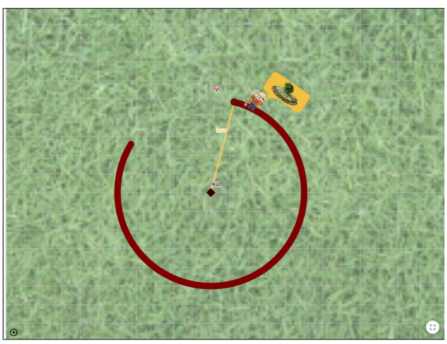
Metodický komentář: V úvodním textu jsou žáci seznámeni s definicí pojmu kružnice, zaveden je také pojem množina bodů dané vlastnosti, který je v appletu objasněn pomocí funkce *Stopa*. Následně je zaveden pojem poloměr kružnice a v appletu b) pomocí funkce *Stopa* také pojem kruh. Otevřené a uzavřené otázky pracovních listů procvičují vztah velikosti průměru a poloměru kružnice/kruhu. V appletech c), d) a e) pracují žáci s vlastností být či nebýt prvkem množiny (kružnice či kruhu). V appletu f) žáci konstruují kružnici, poloměr a průměr. Seznámeni jsou s několika základními GeoGebra nástroji, které při konstrukci využívají. V závěru odpovídají na otázky shrnující celou aktivitu.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-02, M-9-3-05, M-9-3-06, M-9-3-13, M-9-4-01

Zadání pro učitele s řešením

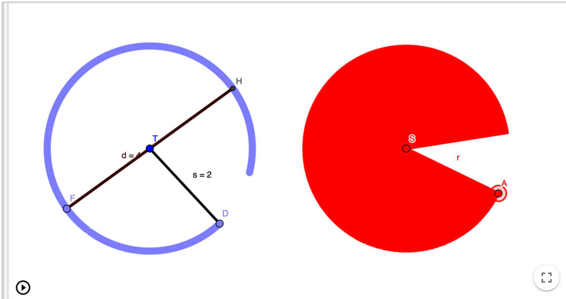
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



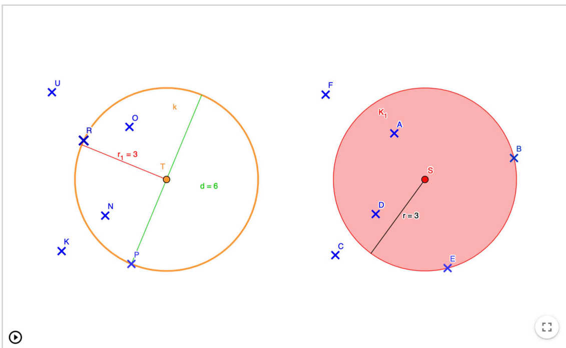
Obrázek 15: Zahradník (PL 2), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2022])

Applet b)



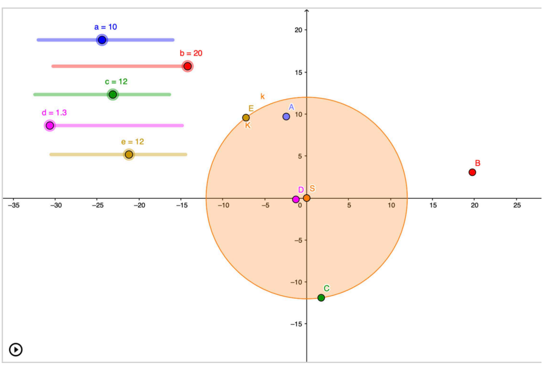
Obrázek 16: Množiny bodů dané vlastnosti – kružnice, kruh (PL 2), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Applet c)



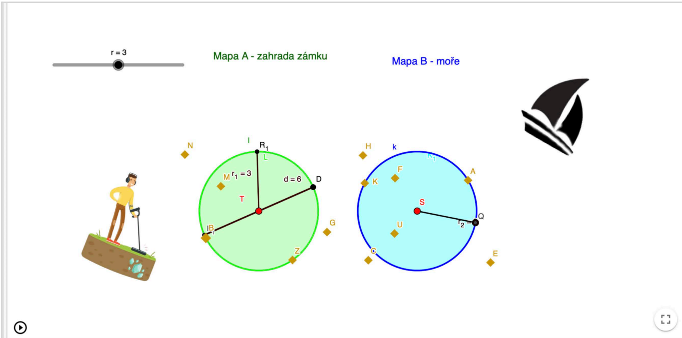
Obrázek 17: Body kruhu a kružnice (PL 2), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Applet d)



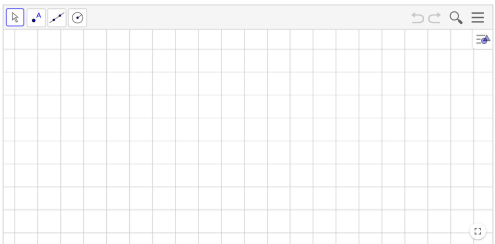
Obrázek 18: Body kruhu a kružnice 2 (PL 2), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Applet e)



Obrázek 19: Hledači diamantů (PL 2), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Applet f)



Obrázek 20: Konstrukční úloha (PL 2), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1

Vítáme vás v aktivitě, ve které se naučíte něco o pojmech kružnice, poloměr a průměr kružnice. Nejprve by bylo dobré zmínit, že se s těmito geometrickými útvary setkáváte běžně velice často v reálném životě, vidět je můžete všude kolem vás, proto je důležité tyto pojmy znát a zařadit je do vaší aktivní slovní zásoby.

Úvodní text 2a)

Začneme kružnicí, kružnici definujeme jako množinu všech bodů v rovině, které mají od daného bodu (středu kružnice) danou stejnou vzdálenost (poloměr kružnice, značíme r). My se tuto definici pokusíme objasnit pomocí appletu a).

Otázka 1a)

Applet a) je modelem zahrady, na které chce zahradník vybudovat kruhový květinový záhon. Vaším úkolem je potvrdit nebo vyvrátit jeho představy o této stavbě.

Zahradníkova představa: „Pokud napevno zarazím do země kůl, přivážu na něj lano, důkladně ho napnu a jeho druhý konec připevním k rydlu, podaří se mi pohybem kolem kůlu vyrýt kružnici, která bude tvořit hraniční křivku mého nového záhonu." Je tato představa správná? Do odpovědi ji potvrďte nebo naopak pomocí argumentů vyvraťte.

Úkol 1a)

1) Klikněte pravým tlačítkem myši na bod s popiskem *Rýč*. 2) Z vyskakovací nabídky vyberte *Zobrazit stopu*. 3) Klikněte na ikonu *Spustit animaci* v levém dolním rohu. 4) Pozorujte, zda se skutečně zahradníkovi podaří vyrýt hranici kruhového záhonu.

Otázka 2a)

Délka napnuté části lana tvoří . . . . kruhového záhonu.

Otázka 3a)

Pokud by zahradník přesunul kůl, zachoval délku napnutého lana a ryl v jiné části zahrady, zachoval by velikost kruhového záhonu?

Tip: Kůlem můžete tahem po *Nákresně* pohybovat. Neváhejte tedy posun vyzkoušet.

Úvodní text 1b)

Dalším rovinným útvarem, se kterým se zde seznámíte, je kruh. Definujeme ho jako množinu všech bodů roviny, které mají od středu vzdálenost menší nebo rovnou poloměru. V appletu b) si prohlédněte, jak taková množina vzniká.

Otázka 1b)

Který z vzniklých geometrických útvarů je kruh?

Otázka 2b)

Jak nazýváme objekt, u kterého zanechává stopu pohybující se bod?

Otázka 3b)

Jak nazýváme objekt, u kterého zanechává stopu pohybující se poloměr r?

Otázka 4b)

Jak se od sebe vzniklé geometrické útvary liší?

Otázka 5b)

V appletu je **úsečka** HF označena písmenem d a **úsečka** TD písmenem r. Z nabídky vyberte všechna pravdivá tvrzení týkající se jejich délky.

Otázka 6b)

V appletu je **úsečka** HF označena písmenem d a **úsečka** TD písmenem s. Z nabídky vyber všechna pravdivá tvrzení.

Úkol 1c)

V levém dolním rohu klikněte na ikonu *Přehrát* a pozorujte.

Otázka 1c)

„Vypište ty z vyznačených bodů, které leží na kružnici k (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 5, cv. 1).“

Otázka 2c)

„Vypište ty z vyznačených bodů, které jsou body kruhu K (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 5, cv. 1).“

Otázka 3c)

Do odpovědi proveďte shrnutí celé této aktivity. Svými slovy napište, co je to kružnice, kruh, poloměr a průměr.

Úkol 1d)

V levém dolním rohu klikněte na ikonu *Přehrát* a pozorujte.

Úkol 2d)

„Kružnice k (S, 12 cm) a kruh K (S, 12 cm) mají společný střed S. Upravte vzdálenost bodů (pomocí barevných posuvníků a=2) A, B, C, D, E od středu tak, aby platilo $|AS|$ = 10 cm, $|BS|$ = 20 cm, $|CS|$ = 12 cm, $|DS|$ = 13 cm, $|ES| = 1,2$ dm (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 6, cv. 2).“

Otázka 1d)

„Které z uvedených bodů (po dokončení úkolu 2d)) leží na kružnici k (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 6, cv. 2)?“

Otázka 2d)

„Které z uvedených bodů (po dokončení úkolu 2d)) neleží na kružnici k (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 6, cv. 2)?“

Otázka 3d)

„Které z uvedených bodů (po dokončení úkolu 2d)) jsou body kruhu K (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 6, cv. 2)?“

Otázka 4d)

„Které z uvedených bodů (po dokončení úkolu 2d)) nejsou body kruhu K (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 6, cv. 2)?“

Úvodní text 1e)

„Na obrázku vidíte kružnice $k(S, r)$, $l(T, r)$ a kruhy $K(S, r)$ a $L(S, r)$, $r = 3$ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 6, cv. 3).“ Skupina hledačů pokladů se vydala na cestu za pokladem, dle indicií by měla být většina diamantů z pokladu ve vzdálenosti 3 m od bodů S a T. Applet zachycuje dvě mapy a okruhy, ve kterých bude skupina hledat.

Otázka 1e)

Které z diamantů hledači najdou, pokud budou hledat v okruhu 3 m (uveďte písmena, která jsou u diamantů uvedena)?

Otázka 2e)

Pohybujte *Posuvníkem* v levém horním rohu. Určete, jaký průměr by musel mít okruh, aby hledači našli všechny diamanty?

Úkol 1f)

1. Pomocí nástroje *Bod* sestrojte libovolně bod S (střed kružnice). Bod přejmenujete pravým kliknutím na bod a výběrem z nabídky → *Zobrazit popis* → *Přejmenovat*)
2. Pomocí nástroje *Kružnice daná středem a poloměrem*, sestrojte kružnici $k(S,$ 32 mm).
3. Pomocí nástroje *Přímka*, sestrojte libovolnou přímku f procházející bodem S.
4. Pomocí nástroje *Průsečík*, sestrojte průsečíky E, F přímky a kružnice.

Otevřená otázka 1f)

„Určete vzdálenost bodů S a F." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 6, cv. 4)

Otevřená otázka 2f)

„Určete vzdálenost bodů E a F." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 6, cv. 4)

Otevřená otázka 3f)

„Kolikrát je větší $|EF|$ než $|SF|$?" (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 6, cv. 4)

Řešení:

Otázka 1a)

Ano, jeho představa je správná, pokud bude udržovat u lana stále stejnou délku. Odpovědi žáků se mohou lišit, otázku lze využít k diskuzi a obhajobě názorů.

Otázka 2a)

C) poloměr

Otázka 3a)

Ano, velikost kruhového záhonu bude zachována.

Otázka 1b)

B) červený

Otázka 2b)

kružnice

Otázka 3b)

kruh

Otázka 4b)

Kruh na rozdíl od kružnice obsahuje i všechny body X, pro které platí /XS/ < r (poloměr kružnice).

Komentář ke správné odpovědi: Z důvodu variability odpovědí žáků uvádíme příklad správné formulace odpovědi: „kružnice je křivka, zatímco kruh je část roviny."

Otázka 5b) C) $s = 0,5d$, D) $d = 2r$, F) $\frac{1}{2}d = r$

Otázka 6b) B) s značí poloměr kružnice a kruhu; D) d značí průměr kružnice.

Otázka 1c) R, P, E, B

Otázka 2c) A, D, E, B

Otázka 3c) kružnice je křivka, zatímco kruh je část roviny, poloměr je polovina délky průměru kružnice, odpovědi

Otázka 1d) E, C

Otázka 2d) D, S, A, B

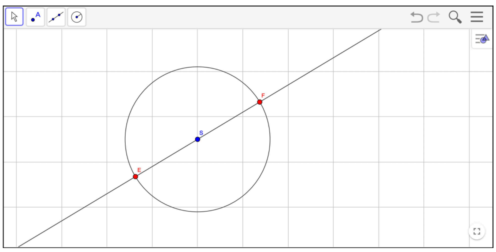
Otázka 3d) A, D, S

Otázka 4d) B

Otázka 1e) M, B, Z, K, F, U, A

Otázka 2e) 4,7 m

Úkol 1f)



Obrázek 21: Řešení konstrukční úlohy 1f) (PL2), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Otázka 1f) 32 mm

Otázka 2f) 64 mm

Otázka 3f) dvakrát

5.3 Pracovní list pro učitele 3 – Dvakrát měř, jednou „řeš“

Kapitola: 1. Rovinné útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma poloměr, průměr kružnice, převody jednotek délky

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/yyg4uqdx

Učivo: Rovinné útvary – úsečka, přímka, kružnice, kruh, čtverec

Časová dotace: 35 min

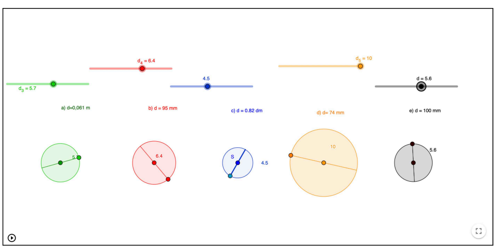
Metodický komentář: Aktivita obsahuje čtyři interaktivní applety, v prvním z nich mají žáci za úkol převádět jednotky délky tak, aby mohli na pohyblivých *Posuvnících* nastavit správné délky průměrů zadaných kružnic. Mají možnost všechny kružnice rozpohybovat a pozorovat desítky různých reprezentací geometrických útvarů kružnice a kruhu. Následně žáci odpovídají na otázky zaměřené na převody jednotek, provádí tzv. numerické procesy. V appletu b) pak žák pohybuje s body vně kružnice, uvnitř kružnice a na kružnici a zkoumá jejich vzdálenost od středu, následně rozhoduje o pravdivosti několika tvrzení týkajících se poloměru, průměru a poměru jejich délek. Následuje konstrukční část aktivity, ve které žáci konstruují kružnici, její průměr a kružnici opsanou a vepsanou čtverci. Po konstrukci si správnost své konstrukce ověří v závěrečných otázkách.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-02, M-9-3-05, M-9-3-06, M-9-3-13, M-9-4-01

Zadání pro učitele s řešením

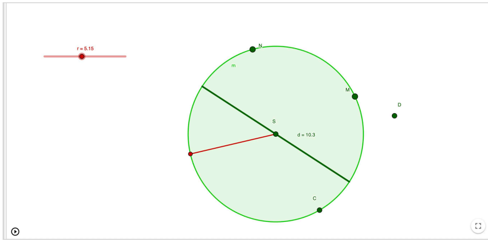
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



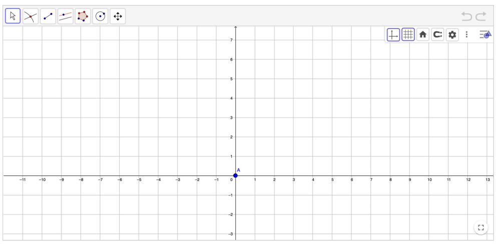
Obrázek 22: Převody jednotek, průměr kružnice (PL3), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Applet b)



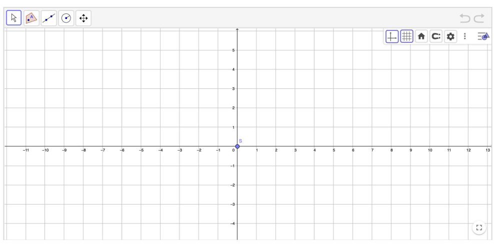
Obrázek 23: Průměr a poloměr kružnice (PL3), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Applet c)



Obrázek 24: Konstrukční úloha 1 (PL 3), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Applet d)



Obrázek 25: Konstrukční úloha 2 (PL 3), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [22.02.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úkol 1a)

V appletu naleznete barevné *Posuvníky* a k nim přiřazené stejně barevné kružnice/kruhy. Nastavte na každém posuvníku průměr kružnice dle zadání a)–e), pozorujte, jak se poloměr a průměr kružnice mění.

Otázka 1a) Určete poloměr kružnice s průměrem a) $d = 0{,}061$ m.

Otázka 2a) Určete poloměr kružnice s průměrem b) $d = 95$ mm.

Otázka 3a) Určete poloměr kružnice s průměrem c) $d = 0{,}82$ dm.

Otázka 4a) Určete poloměr kružnice s průměrem d) $d = 74$ mm.

Otázka 5a) Určete poloměr kružnice s průměrem e) $d = 100$ mm.

Úvodní text k appletu b)

Při hledání odpovědí na otázky níže použijte applet b). Pohybovat v něm můžete *Posuvníkem* r, body M, N, C, D (tahem) a navíc si můžete spustit animaci kliknutím na ikonu *Přehrát* v levém dolním rohu.

Otázka 1b) Rozhodněte, zda platí: a) Když jsou M a N body kružnice, musí být jejich vzdálenost menší než průměr (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 7, cv. 6).

Otázka 2b) b) Průměr kružnice je větší než její poloměr (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 7, cv. 6).

Otázka 3b) c) Vzdálenost bodu kružnice od jejího středu se rovná poloměru (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 7, cv. 6).

Otázka 4b) d) Když se vzdálenost libovolných bodů C a D rovná poloměru a bod C leží na kružnici, musí být bod D jejím středem (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 7, cv. 6).

Úkol 1c)

1. Pomocí nástroje *Pravidelný mnohoúhelník* sestrojte čtverec $ABCD$ s délkou strany 40 mm.
2. Pomocí nástroje *Úsečka* sestrojte obě jeho úhlopříčky.
3. Pomocí nástroje *Průsečík* sestrojte průsečík těchto úhlopříček (Q).
4. Pomocí nástroje *Rovnoběžka* veďte bodem Q rovnoběžky p a q se stranami čtverce.
5. Pomocí nástroje *Průsečík* sestrojte průsečíky K, L, M, N přímek p a q se stranami čtverce.
6. Pomocí nástroje *Kružnice daná středem a bodem* sestrojte kružnice s poloměrem $\frac{1}{2}|AB|$ a se středy v bodech a) K, L, M, N; b) A, B, C, D.

Úkol 1d)

1. Pomocí nástroje *Kružnice daná středem a poloměrem* sestrojte kružnici $k(S, 3cm)$.
2. Pomocí nástroje *Bod na objektu* zvolte na kružnici 2 libovolné body A a B.

3. Pomocí nástroje *Přímka* sestrojte postupně průměr kružnice procházející bodem $A(d_1)$ a následně průměr kružnice procházející bodem $B(d_2)$.
4. Pomocí nástroje *Průsečík* nalezněte další dva průsečíky přímek a kružnice.
5. Pohybujte body A a B, pozorujte délku poloměrů a odpovězte na otázky níže.

Otevřená otázka 1d)

V appletu zjistěte, zda mají oba sestrojené průměry stejnou délku, a kolik je to centimetrů (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 8, cv. 8)?

Uzavřená otázka 2d)

Rozhodněte, zda platí: Všechny průměry kružnice k jsou shodné úsečky (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 8, cv. 8).

Řešení:

Otázka 1a) B) 0,305 dm

Otázka 2a) D) 0,0475 m

Otázka 3a) D) 4,1 cm

Otázka 4a) D) 0,037 m

Otázka 5a) D) 0,5 dm

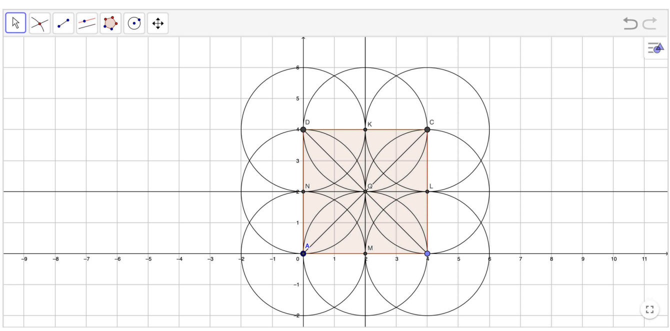
Otázka 1b) B) ne

Otázka 2b) A) ano

Otázka 3b) A) ano

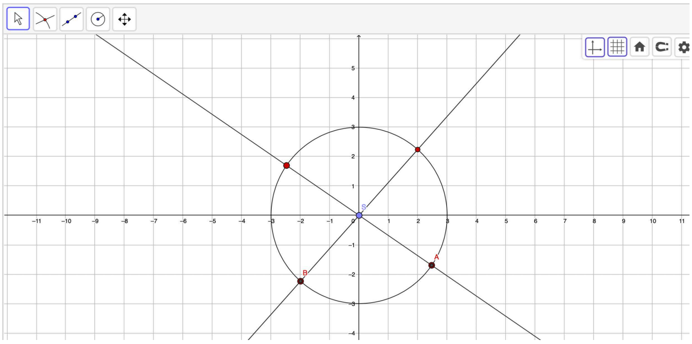
Otázka 4b) B) ne

Úkol 1c)



Obrázek 26: Konstrukční úloha – kružnice vepsaná, opsaná čtverci (PL 3), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [28.10.2022])

Úkol 1d)



Obrázek 27: Konstrukční úloha – průměr kružnice (PL 3), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.11.2022])

Otevřená otázka 1d) Oba průměry mají stejnou délku 6 cm.

Uzavřená otázka 2d) A) ano

5.4 Pracovní list pro učitele 4 – Souměrnosti kružnice a kruhu

Kapitola: 2. Konstrukční úlohy

Popis aktivity: Cvičení na téma osová, středová souměrnost kružnice/kruhu, měřítko mapy

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/pqsudwvm

Učivo: Rovinné útvary – kružnice, kruh, Konstrukční úlohy – množiny bodů dané vlastnosti, osová souměrnost, středová souměrnost

Časová dotace: 45 min

Metodický komentář: Aktivita začíná úvodním textem, který definuje osovou a středovou souměrnost. Žáci mají k dispozici applet a), ve kterém pohybují s objekty v osové a středové souměrnosti, a sledují změny, jež nastávají při změně polohy osy nebo středu souměrnosti. Poté, co si vyzkouší v interaktivním appletu, jak osová a středová souměrnost funguje, odpovídají na otevřené a uzavřené otázky a učí se s nástroji *Osová* a *Středová souměrnost*. V další části pracují s kružnicí, osově a středově souměrnými body kružnice a jejich souřadnicemi, seznámí se také s kartézskou soustavou *Oxy*. V poslední části řeší slovní úlohy, pomocí GeoGebra nástrojů např. měří vzdušnou vzdálenost bodů na mapě, převádí ji pomocí měřítka na vzdálenost skutečnou.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-05, M-9-3-06, M-9-3-08, M-9-3-13, M-9-4-01

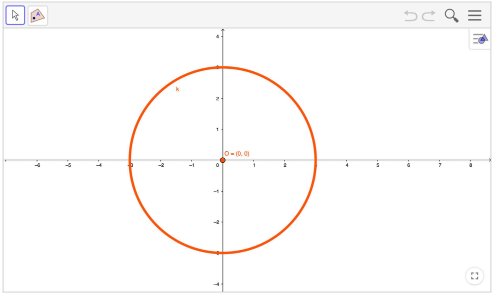
Zadání pro učitele s řešením

Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)

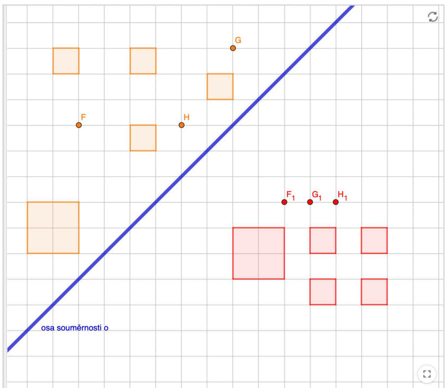
Obrázek 28: Osová a středová souměrnost (PL 4), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.11.2022])

Applet b)



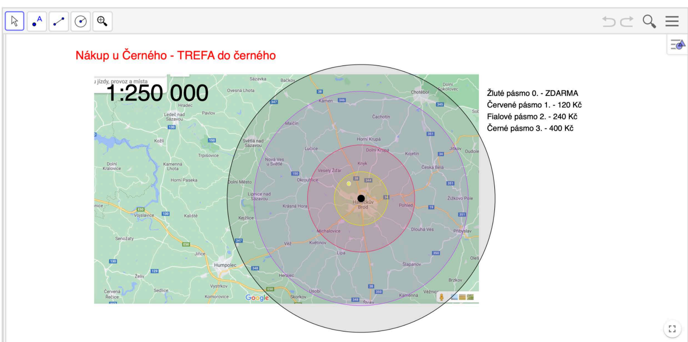
Obrázek 29: Souřadnice bodů kružnice (PL 4), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.11.2022])

Applet c)



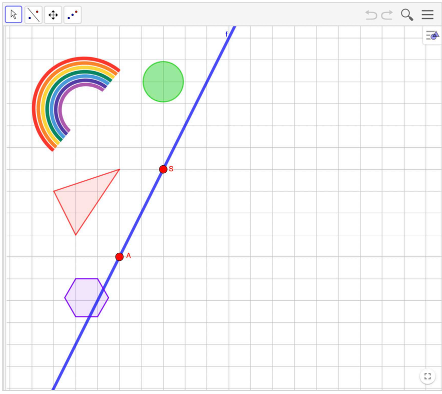
Obrázek 30: Osová souměrnost (PL 4), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.11.2022])

Applet d)



Obrázek 31: Práce s mapou (PL 4), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.11.2022])

Applet e)



Obrázek 32: Konstrukční úloha – osová, středová souměrnost (PL 4), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [23.02.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1a)

„Osová souměrnost s osou o, nebo také souměrnost podle osy o, je shodné zobrazení $O(o)$, které přiřazuje: každému bodu X, který není prvkem osy o, bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o, každému bodu Y, který je prvkem osy o, bod $Y' = Y$. Přímka o se nazývá osa souměrnosti.“ (Tlustý & Huclová, 2020, s. 4). „Jsou dány dva různé body X, S. Středová souměrnost $S(S)$ je shodné zobrazení, které přiřazuje: každému bodu X, S bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX', bodu S bod $S' = S$ (Krynický, 2010).“

Úkol 1a)

V interaktivním appletu můžete spustit animaci kliknutím na ikonu *Spustit* v levém dolním rohu. Zároveň můžete pohybovat červeným *Posuvníkem r*. Pohybovat můžete také s body D, E, S. Prohlédněte si, jak se mění obrazce (kočky a psa) v závislosti na poloze osy (o) či středu (S) souměrnosti.

Otázka 1a) Je kružnice k osově souměrná?

Otázka 2a) Kolik os souměrnosti kružnice k má?

Otázka 3a) Kterým bodem všechny osy souměrnosti kružnice k prochází?

Otázka 4a) Vypište středově a osově souměrné objekty z appletu a).

Otázka 5a) Vypište středově souměrné objekty z appletu a).

Úkol 1b) „V pravoúhlé soustavě souřadnic O_{xy} s délkami jednotek 1 cm na osách je sestrojena kružnice $k(O, 3\text{ cm})$." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 8, cv. 10).

Použijte nástroj *Bod na objektu* k vyznačení všech bodů, které leží na kružnici k, a jejich souřadnice jsou celá čísla. Následně klikněte pravým tlačítkem na každý z bodů, z vyskakovací nabídky vyber *Nastavení – Zobrazit popis: Název & Hodnota*.

Otázka 1b)

„Souřadnice všech bodů, které jste v úkolu 1b) nalezli, zapište společně s názvem bodu. (Př: $A = [1, 5]$) (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 8, cv. 10)."

Úkol 1c) V appletu d) přesuňte tahem červené geometrické objekty tak, aby byly osově souměrné dle osy o s oranžovými geometrickými objekty.

Úkol 1d)

„Pan Černý chce rozšířit okruh svých zákazníků. Proto nabízí dopravu zakoupených ledniček, sporáků a dalších spotřebičů do bytů zákazníků za nízké jednotné ceny. Cenová pásma zakreslil do mapy pomocí „soustředných kružnic", střed všech kružnic je samozřejmě v jeho prodejně." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 9, cv. 11–12).

MĚŘENÍ VZDUŠNÉ VZDÁLENOSTI: Pan Černý si všechny cesty zaznamenává a chce znát vzdušnou vzdálenost míst, do kterých z Havlíčkova Brodu jede. K nalezení odpovědí na otázky níže:

1. Použijte nástroj *Bod* k označení místa, kam lednici poveze.
2. Použijte nástroj *Úsečka* a spojte Havlíčkův Brod s místem, které jste označili.
3. Pravým tlačítkem myši klikněte na úsečku, z nabídky vyberte *Nastavení – Zobrazit popis – Hodnota*.
4. Pomocí měřítka určete vzdušnou vzdálenost mezi dvěma místy, nezapomeňte – 1 cm na mapě je 250 000 cm ve skutečnosti.

Otázka 1d)

„Určete podle mapy a ceníku, kolik za přivezení ledničky zaplatí paní Dlouhá z Dlouhé Vsi a jakou vzdušnou vzdálenost si pan Černý zapíše poté, co Dlouhou Ves navštíví." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 8, cv. 11).

Otázka 2d)

„Určete podle mapy a ceníku, kolik za přivezení ledničky zaplatí pan Hašek z Kejžlic a jakou vzdušnou vzdálenost si pan Černý zapíše poté, co Kejžlice navštíví.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 8, cv. 11).

Otázka 3d)

„Určete podle mapy a ceníku, kolik za přivezení ledničky zaplatí paní Veselá z Veselého Žďáru a jakou vzdušnou vzdálenost si pan Černý zapíše poté, co Veselý Žďár navštíví.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 8, cv. 11).

Otázka 4d)

Pan Opatrný ze samoty Kohoutov u Chotěboře si chce koupit od pana Černého elektrický sporák. Není si však jist, do kterého pásma patří, a zda bude vůbec Kohoutov do nějaké z oblastí patřit. Vydal se tedy do prodejny a zjistil, že je prodejna od Kohoutova vzdušně vzdálena 6,5 km. Do kterého pásma patří Kohoutov a kolik za dovoz zaplatí?

Úkol 1e)

1) Pomocí nástroje *Osová souměrnost* konstruujte osově souměrné obrazy duhy a fialového šestiúhelníku podle osy f.

2) Pomocí nástroje *Středová souměrnost* konstruujte středově souměrné obrazy trojúhelníku a kruhu podle středu S.

Řešení:

Otázka 1a) A) ano

Otázka 2a) nekonečně mnoho

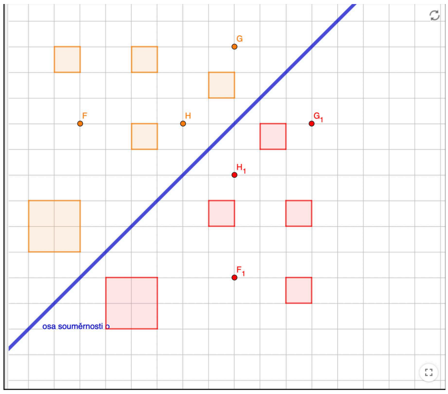
Otázka 3a) středem S_1 kružnice k

Otázka 4a) kružnice/kruh k/K, obrázek pejska, obrázek černé kočky

Otázka 5a) kružnice/kruh k/K, obrázek černé kočky

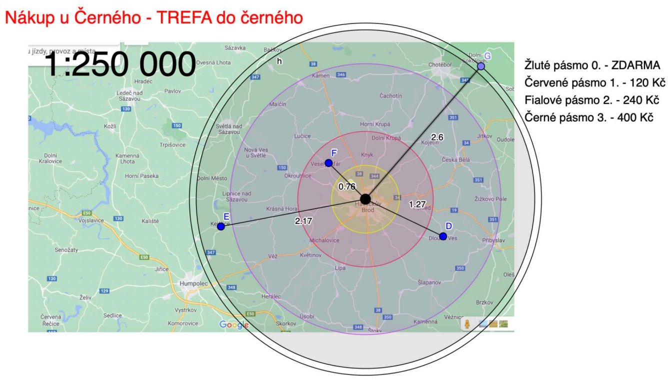
Otázka 1b) $A = [3, 0]$, $B = [0, 3]$, $C = [-3, 0]$, $D = [0, -3]$

Úkol 1c)



Obrázek 33: Řešení 1c) (PL 4), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [24.02.2023])

Úkol 1d)



Obrázek 34: Řešení 1d) (PL 4), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.11.2022])

Otázka 1d) Za dovoz zaplatí 240 Kč, vzdušná vzdálenost Havlíčkův Brod – Dlouhá Ves je přibližně 3,15 km.

Otázka 2d) Za dovoz zaplatí 400 Kč, vzdušná vzdálenost Havlíčkův Brod – Kejžlice je přibližně 5,425 km.

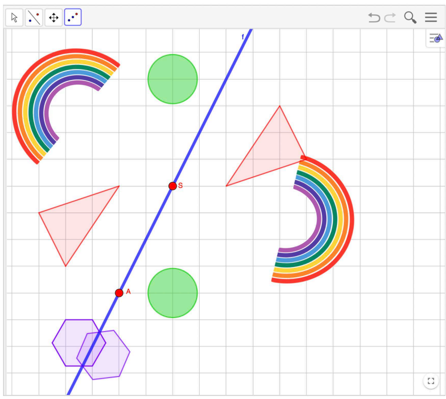
Otázka 3d) Za dovoz zaplatí 120 Kč, vzdušná vzdálenost Havlíčkův Brod – Veselý Žďár je přibližně 1,85 km.

Otázka 4d) Po sestrojení kružnice o poloměru 2,6 cm (převod 6,5 km = 650 000 cm : 250 000 = 2,6 cm) jsme zjistili, že panu Opatrnému není možné lednici dovézt, Kohoutov je mimo oblasti dovozu.

Metodický komentář k 1–4d)

Vzdušná vzdálenost se může mírně lišit, záleží na umístění bodu, vyučující by měli při zpětné kontrole zahrnout i práci v appletu.

Úkol 1e)



Obrázek 35: Řešení 1e) (PL 4), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [24.02.2023])

5.5 Pracovní list pro učitele 5 – Kružnice a přímka

Kapitola: 4. Metrické vlastnosti v rovině

Popis aktivity: Cvičení na téma kružnice a přímka

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/exxedxut

Učivo: Rovinné útvary: kružnice, kruh, přímka, úsečka, vzájemná poloha – přímky a kružnice, Metrické vlastnosti v rovině – vzdálenost bodu od přímky

Časová dotace: 30 min

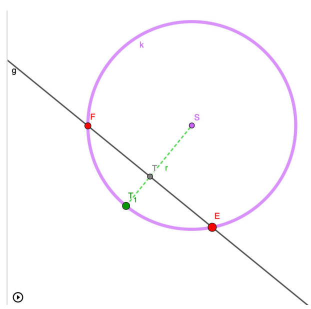
Metodický komentář: Žáci v appletu a) pohybují body na kružnici i mimo ni a pozorují vzájemnou polohu přímky a kružnice. Zkoumají, jaké situace mohou nastat, a následně odpovídají na otázky, které ověří, zda se jim podařilo najít všechny možné vzájemné polohy těchto dvou rovinných útvarů. V appletu b) mají možnost pozorovat tečnu, sečnu a vnější přímku kružnice. Jejich úkolem je k jednotlivým polohám přímek přiřadit počet společných bodů s kružnicí. Následně jsou seznámeni s pojmem tětiva a mají za úkol nastavit pozici bodů tak, aby výsledná tětiva měla co nejdelší délku. Žáci měří a odpovídají na otázky spojené se zmíněnými pojmy. V poslední části jsou seznámeni s měřením vzdálenosti bodu od přímky. Učí se pracovat s nástroji *Průsečík*, *Úsečka* a *Kolmice*.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-05, M-9-3-06, M-9-3-08, M-9-3-13, M-9-4-01

Zadání pro učitele s řešením

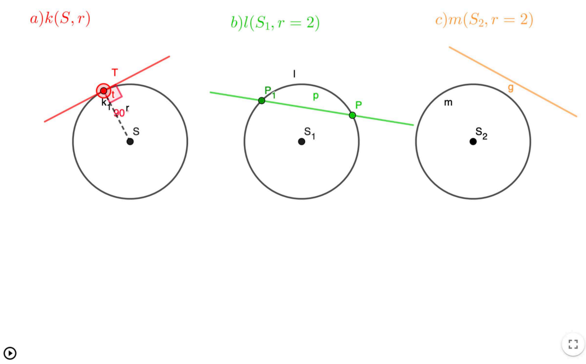
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



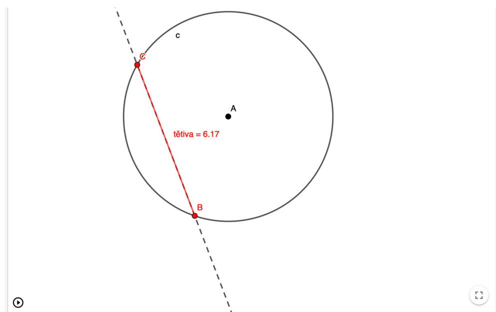
Obrázek 36: Vzájemná poloha kružnice a přímky (PL 5), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.11.2022])

Applet b)



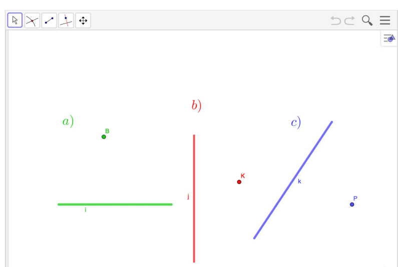
Obrázek 37: Tečna, sečna, vnější přímka kružnice (PL 5), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.11.2022])

Applet c)



Obrázek 38: Tětiva kružnice (PL 5), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.11.2022])

Applet d)



Obrázek 39: Vzdálenost bodu od přímky (PL 5), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.11.2022])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úkol 1a)

„Výzkumník Pepa zkoumá, kolik společných bodů může mít přímka s kružnicí. Zkus tento úkol vyřešit také.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 10, cv. A). Pohybuj bodem T a najdi všechny situace, které mohou nastat.

Otázka 1a) Kolik společných bodů může mít kružnice a přímka? Vypiš všechny situace, které mohou nastat a které jsi objevil v appletu a).

Otázka 1b) a) Přímka t u kružnice **a)** $k(S, r)$ je . . .

Otázka 2b) a) Přímka p u kružnice **b)** $l(S_1, r = 2)$ je . . .

Otázka 3b) a) Přímka t u kružnice **a)** $m(S_2, r = 2)$ je . . .

Úvodní text 1c)

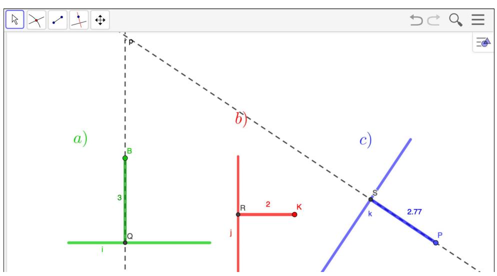
Seznámili jsme se s pojmy sečna, tečna a vnější přímka. Další pojem, který zavedeme, je tětiva. Tětiva je úsečka spojující dva body na kružnici. Prohlédněte si applet c) a odpovězte na otázky pod ním. Označení tětiva se používá i pro část luku. Dokážete najít analogii s tětivou kružnice?

Otázka 1c) Jaký je rozdíl mezi sečnou a tětivou?

Otázka 2c) V appletu c) umístěte body B a C (pohybujte jimi tahem) tak, abyste sestrojili takovou sečnu kružnice $c(A, r = 4\,\text{cm})$, na které leží nejdelší tětiva. Jakou má tato tětiva délku?

Otázka 3c) Kterým bodem tětiva z otázky 2c) zaručeně prochází?

Úvodní text 1d) „Vzdálenost bodu A od přímky p měříme na kolmici vedené bodem A k přímce p. Bod P je pata kolmice.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 11, cv. B). V appletu d) změřte vzdálenost: bodu B od přímky i, bodu K od přímky j, bodu P od přímky k.



Obrázek 40: Vzdálenost bodu od přímky 1 (PL 5), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.11.2022])

Úkol 1d)

1. Vyberte nástroj *Kolmice*, klikněte na přímku, následně na bod, jehož vzdálenost od přímky chcete měřit.
2. Vyberte nástroj *Průsečík*, klikněte na kolmici sestrojenou v prvním kroku, následně klikněte na přímku, kterou kolmice protíná.
3. Klikněte pravým tlačítkem myši na kolmici a z vyskakovací nabídky vyberte *Zobrazit objekt*.
4. Vyberte nástroj *Úsečka*, klikněte na bod a následně na průsečík, který byl sestrojen v 2. kroku. Pro zobrazení vzdálenosti (resp. délky této úsečky) na ni stačí kliknout pravým tlačítkem a z vyskakovací tabulky vybrat *Nastavení – Zobrazit popis – Hodnota*.

Otázka 1d) Jaká je vzdálenost bodu: B od přímky i, K od přímky j, P od přímky k?

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Otázka 1a) Kružnice a přímka mohou mít: žádný, jeden nebo dva společné body.

Otázka 1b) B) tečna kružnice k

Otázka 2b) A) sečna kružnice l

Otázka 3b) C) vnější přímka kružnice m

Otázka 1c) Sečna je přímka mající s kružnicí dva společné body, tětiva je úsečka, jejíž krajní body leží na kružnici.

Otázka 2c) 8 cm

Otázka 3c) středem kružnice

Otázka 1d) $|B_i| = 3$; $|K_j| = 2$; $|P_k| = 2,77$

5.6 Pracovní list pro učitele 6 – Tečna kružnice

Kapitola: 1. Rovinné útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma tečna kružnice

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/rsy527se

Učivo: Rovinné útvary: kružnice, kruh, přímka, úhel

Časová dotace: 30 min

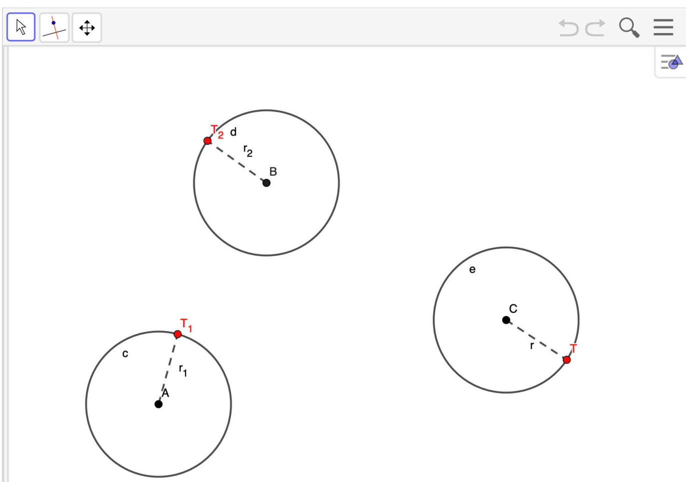
Metodický komentář: V první části jsou žáci seznámeni s pojmem tečna a učí se pracovat s GeoGebra nástrojem *Kolmice*. Následně měří vnitřní úhly kruhové výseče a odpovídají na otázky. Druhá část aktivity obsahuje práci s kartézskou soustavou souřadnic, ve které žáci konstruují body dotyku a středy kružnic, jejichž tečnami jsou právě osy x a y. Dále pomocí tečen a jejich bodů dotyku hledají nejdelší tětivu dané kružnice a tečny kolmé k dané přímce.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-03, M-9-3-06, M-9-3-13, M-9-4-01

Zadání pro učitele s řešením

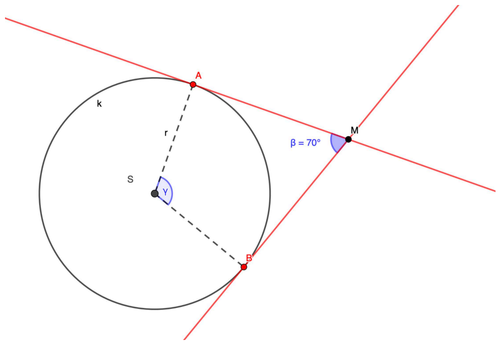
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



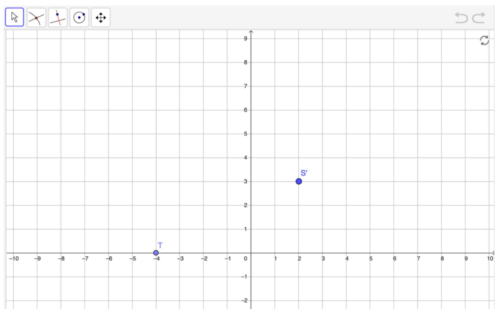
Obrázek 41: Tečna kružnice (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Applet b)



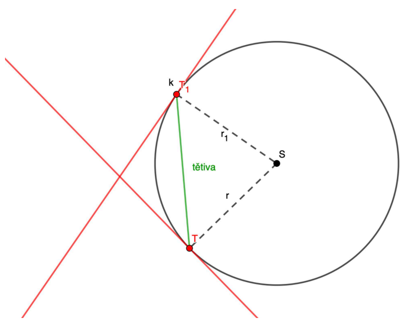
Obrázek 42: Vnitřní úhel kruhové výseče (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Applet c)



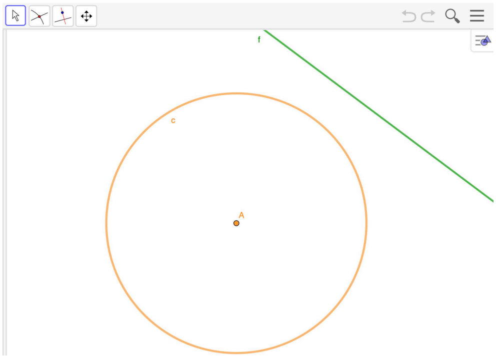
Obrázek 43: Konstrukční úloha 1 (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Applet d)



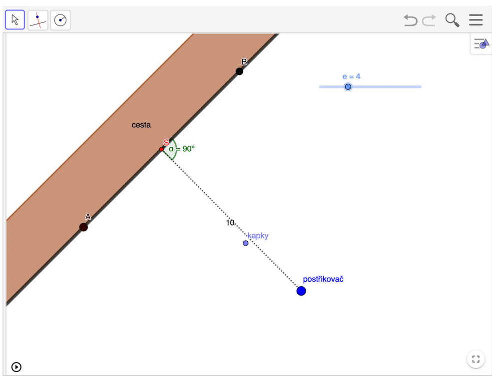
Obrázek 44: Nejdelší tětiva kružnice (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Applet e)



Obrázek 45: Konstrukční úloha 2 (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Applet f)



Obrázek 46: Slovní úloha 1 (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1a) „Tečna kružnice je kolmá k přímce, která prochází jejím bodem dotyku a středem kružnice." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 12, cv. C).

Úkol 1a) Pomocí nástroje *Kolmice* sestrojte tečny kružnicím c, e, d s body dotyku T_1, T, T_2.

Otázka 1b) „Přímky j a i jsou tečny kružnice k, které procházejí bodem M, body A, B jsou jejich body dotyku, $|\measuredangle AMB| = 70°$. Určete velikost $\measuredangle ASB$." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 13, cv. 11).

Otázka 1c) V pravoúhlé soustavě souřadnic O_{xy} jsou délky jednotek na osách ve skutečnosti 1 cm. a) Tečnou **kružnice** $k(S, 3 \text{ cm})$ je osa x, kružnice se jí dotýká v bodě $T[-4, 0]$. Určete souřadnice středu S.

Otázka 2c) V pravoúhlé soustavě souřadnic O_{xy} jsou délky jednotek na osách ve skutečnosti 1 cm. Tečnou **kružnice** $k(S, r)$ je osa y, jejím středem je bod $S[2; 3]$. Určete poloměr r a souřadnice bodu T, který je bodem dotyku kružnice k a osy y.

Úkol 1d) Pohybujte tahem body T_1 a T a pokuste se je umístit tak, aby tečny kružnice v krajních bodech její tětivy byly navzájem rovnoběžné.

Otázka 1d) Mohou být tečny kružnice v krajních bodech některé její tětivy navzájem rovnoběžné?

Úkol 1e) „Čenda popsal, jak sestrojí všechny takové tečny **kružnice** c, které jsou rovnoběžné s **přímkou** f:

1. $g, g \perp f, A \in g$,
2. $T, T \in g \cap c$,
3. $t, t \perp g, T \in t$." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 14, cv. 14)

Konstruujte tečnu/tečny stejně jako Čenda v appletu e) pomocí nástrojů *Kolmice* a *Průsečík*. „Kolik takových tečen existuje?" (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 14, cv. 14)

Úkol 1f) „V nově budovaném parku budou trvale umístěny otáčivé postřikovače na kropení trávníků. V appletu f) umístěte postřikovač tak, aby, pokud jeho dosah (e) nastavíte na maximum ($e = 10$), nepokropil návštěvníky parku na cestě AB." (Odvárko & Kadleček, s. 14, cv. 16)

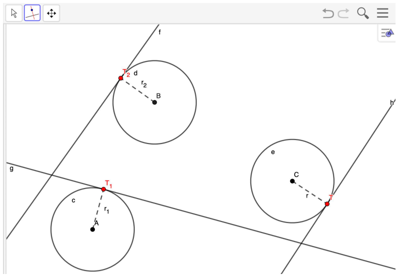
Úkol 2f)

1. Poté, co naleznete správnou polohu *Postřikovače*, animaci v levém dolním rohu zastavte.
2. Nastavte na *Posuvníku* $e = 10$.
3. Klikněte pravým tlačítkem na *Kapky* a z vyskakovací nabídky vyberte *Zobrazit stopu*.
4. Animaci znovu v levém dolním rohu spusťte a své řešení si ověřte.

Otázka 1f) Popište svůj postup při hledání správné pozice postřikovače.

Řešení:

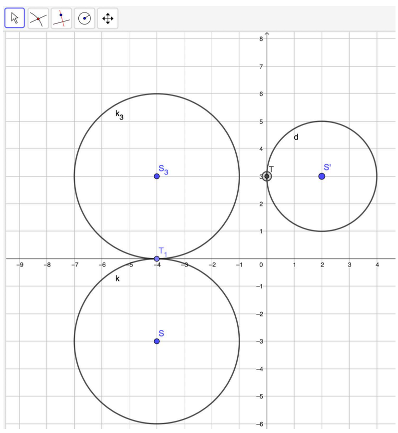
Úkol 1a)



Obrázek 47: Řešení 1a) (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Otázka 1b) $110°$

Otázka 1c)



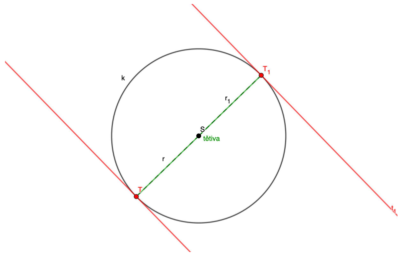
Obrázek 48: Řešení 1c) (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Otázka 1c) $S[-4,-3]$,$S_1[-4,3]$

Otázka 2c) $T[0,3]$

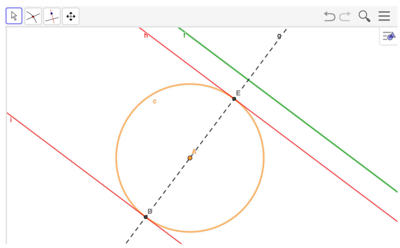
Otázka 1d) Ano, když je tětiva průměrem kružnice.

Úkol 1d)

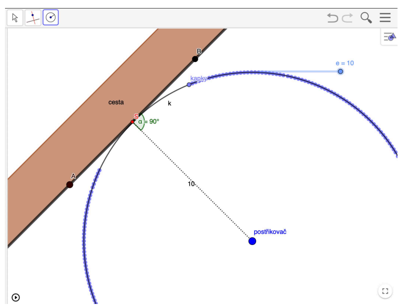


Obrázek 49: Řešení 1d) (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Úkol 1e) 2



Obrázek 50: Řešení 1e) (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])



Obrázek 51: Řešení 1 a 2f) (PL 6), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [25.02.2023])

Otázka 1f) Individuální, uvedeno by mělo být použití nástroje *Kolmice* a *Kružnice dané středem a poloměrem*. ***Kolmicí*** naleznou žáci osu úsečky AB, kružnicí poté bod vzdálený od středu úsečky 10 cm.

5.7 Pracovní list pro učitele 7 – Tháles z Milétu

Kapitola: 2. Konstrukční úlohy

Popis aktivity: Cvičení na téma Thaletova věta

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/wckxcbyp

Učivo: Rovinné útvary: kružnice, kruh, trojúhelník, Konstrukční úlohy: množiny všech bodů dané vlastnosti – Thaletova kružnice

Časová dotace: 35 min

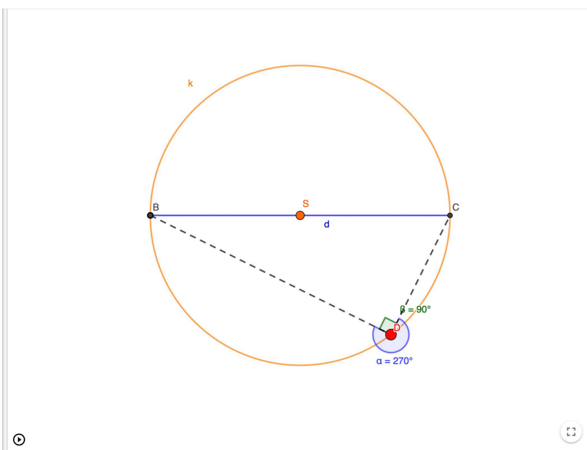
Metodický komentář: Úvodní text představí známého filozofa, geometra a astronoma Thaleta z Miletu a jeho hlavní objevy, které využíváme dodnes. Žáci v následujících úkolech pomáhají imaginárnímu chlapci Petrovi při řešení hned několika problémů. Vyzkouší si odhalit podstatu a vlastnosti Thaletovy kružnice, zkoumají úhly, ze kterých vidí průměr kružnice (vně i uvnitř kružnice). V poslední části konstruují pravoúhlý trojúhelník s využitím znalosti Thaletovy kružnice.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-03, M-9-3-05, M-9-3-06, M-9-3-13, M-9-4-01

Zadání pro učitele s řešením

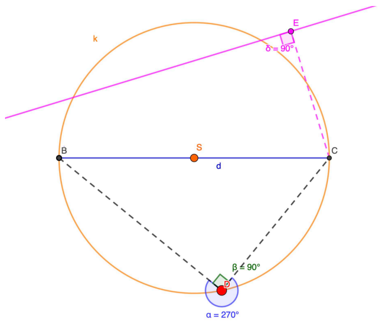
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



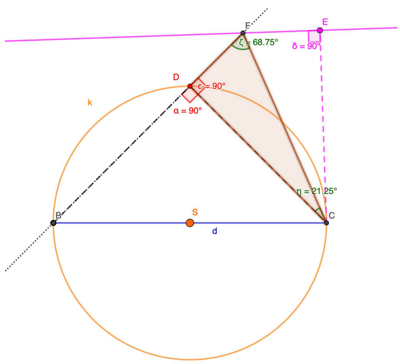
Obrázek 52: Thaletova kružnice 1 (PL 7), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet b)



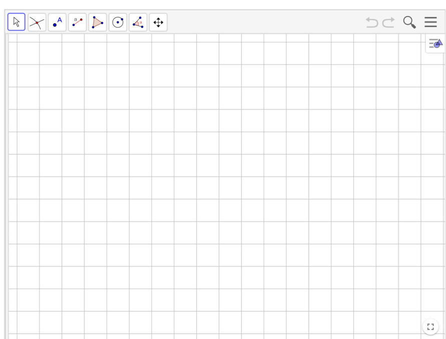
Obrázek 53: Thaletova kružnice 2 (PL 7), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet c)



Obrázek 54: Thaletova kružnice 3 (PL 7), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet d)



Obrázek 55: Konstrukční úloha 1 ((PL 7), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1

„Thales z Miletu byl filosof, geometr a astronom žijící v Řecku okolo 624 př.n.l. – 548 př. n. l. Byl považován za jednoho ze sedmi mudrců. Snažil se zkoumat svět a přírodu rozumově a vysvětlovat je, aniž by se přitom odvolával na mýty. Jeho jméno je spojováno s pěti geometrickými větami: každý průměr dělí kruh na dvě stejné části, úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné, protilehlé úhly mezi dvěma protínajícími se přímkami jsou shodné, dva trojúhelníky jsou shodné, pokud mají stejné dva úhly a jednu stranu, trojúhelník vepsaný oblouku nad průměrem kružnice je pravoúhlý – TO JE ONA, THALETOVA VĚTA!“ (Kirk et al., 2004, s. 100–129)

Úvodní text 1a) „Petr narýsoval kružnici s poloměrem 5 cm a sestrojil její průměr. Krajní body označil B, C. Na kružnici zvolil třetí **bod** D a sestrojil úsečky BD a CD. Změřil velikost jednoho úhlu nad průměrem kružnice a tvrdí, že všechny úhly nad průměrem jsou pravé.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 20, cv. A) Pohybujte tahem **bodem** D a jeho tvrzení ověřte. Následně si spusťte animaci a pozorujte. Pohybovat můžete také bodem B, prověřte tedy i tyto možnosti.

Otázka 1a) „Rozumíš Petrovu tvrzení? Souhlasíš s ním?“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 20, cv. A)

Otázka 2) „Platí to, co říká Petr, opravdu vždycky? I kdyby narýsoval kružnici s poloměrem 1 kilometr?“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 20, cv. B)

Úvodní text 1b) Petr ještě nemá dost a rozhodl se zkoumat i úhel BEC, tedy úhel u vrcholu/bodu, který je vně **kružnice** k. „Ptá se, zda existuje vůbec nějaký takový bod E, který neleží na kružnici a přitom je úhel BEC pravý?“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 21, cv. C)

Úkol 1b) Pohybujte bodem E a pokuste se pozici takového bodu najít.

Otázka 1c) Pokud jste na otázku 1b) odpověděli, že bod neexistuje, měli jste pravdu. V appletu c) by se totiž musel bod E stát bodem F a přitom být stále vrcholem pravého úhlu. Důkladně si prohlédněte objekty v appletu c) a pokuste se vysvětlit, proč tato situace nikdy nenastane. Heslovitá nápověda: Součet úhlů v trojúhelníku.

Shrnutí

Thaletova věta „Pro libovolný trojúhelník ABC platí: jestliže je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, leží vrchol C na kružnici k s průměrem AB, a jestliže vrchol C leží na kružnici k s průměrem AB, je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB. *Kružnice* k je Thaletova kružnice s průměrem AB.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 21, cv. D)

Úkol 1d) „Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, ve kterém má přepona $|AB| = 8$ cm, $|AC| = 3$ cm.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 22, cv. F). Nápověda: Ke konstrukci použijte nástroje z horního panelu nástrojů: *Průsečík*, *Střed*, *Bod*, *Úsečku s danou délkou*, *Mnohoúhelník*, *Kružnici danou středem a bodem*, *Kružnici danou středem a poloměrem* a *Úhel*.

Otázka 1d) Postup konstrukce popište do odpovědi.

Řešení:

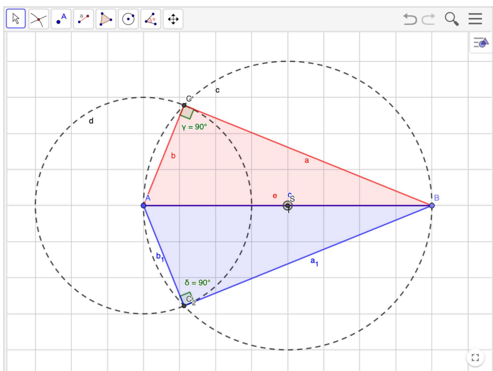
Otázka 1a) Jeho konstrukce i tvrzení jsou správná. Porozumění žáků je individuální, vyučující by měl porozumění konstrukci Thaletovy kružnice prověřit.

Otázka 2) ano

Úkol 1b) Takový bod neexistuje.

Otázka 1c) Trojúhelník nemůže obsahovat 2 pravé úhly.

Úkol 1d)



Obrázek 56: Řešení konstrukční úloha 1 (PL 7), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Otázka 1d) Odpovědi žáků se mohou lišit, uvedeme standardní postup konstrukce. Po řadě použité GeoGebra nástroje: *Úsečka s pevnou délkou* (8 cm), *Střed* (úsečky AB), *Kružnice daná středem a bodem* $(t, S, 3\text{ cm})$, *Kružnice daná poloměrem* $N(k, A, 3\text{ cm})$, *Průsečík* $(C, D \in k \cap t)$, *Mnohoúhelník* (ABC, ABD).

5.8 Pracovní list pro učitele 8 – Délka kružnice

Kapitola: 1. Rovinné útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma obvod kružnice

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/beestkaf

Učivo: Rovinné útvary: kružnice, kruh, čtverec

Časová dotace: 40 min

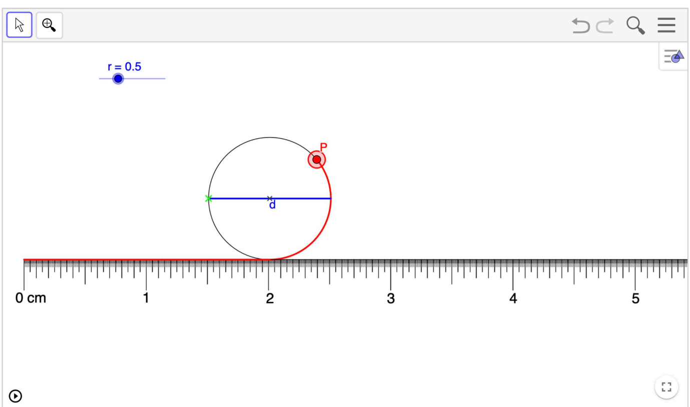
Metodický komentář: Žáky v první části pracovního listu čeká objevení Ludolfova čísla, k dispozici mají interaktivní applet, ve kterém měří délku provázku (pomocí pravítka), který je obmotaný kolem kruhu. Opakovaně délku provázku měří, počítají podíl délky a průměru kružnice a objevují tak přibližnou hodnotu Ludolfova čísla π. V další části řeší slovní úlohy na obvod a obsah rovinných útvarů. V závěru konstruují kružnici vepsanou čtverci.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-03, M-9-3-05, M-9-3-06, M-9-3-13, M-9-4-01

Zadání pro učitele s řešením

Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)

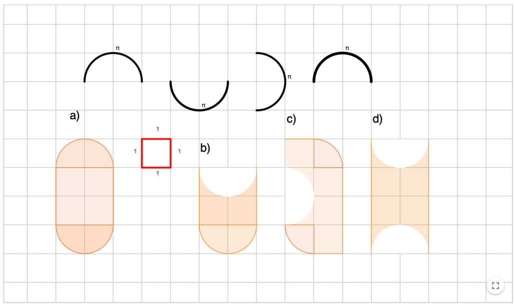


Obrázek 57: Obvod kružnice (PL 8), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet b)

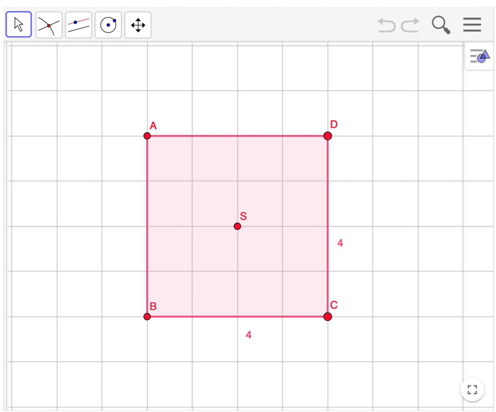
Obrázek 58: Slovní úloha – cyklista (PL 8), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet c)



Obrázek 59: Obvod rovinných útvarů (PL 8), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet d)



Obrázek 60: Konstrukční úloha – kružnice vepsaná (PL 8), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1a) „Kolikrát je průměr kružnice větší než délka kružnice?“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 27, cv. A)

Úkol 1a) Nastavte pomocí *Posuvníku* a=2 délku průměru dle tabulky, následně rozviňte červený provázek omotaný kolem kružnice a zapište si jeho délku do odpovědi na otázky 1–3a).

Otázka 1a) Pokud nastavíme průměr kružnice na 1 cm. Jaká bude délka kružnice? A kolikrát je tato délka větší než její průměr $\frac{o}{d}$?

Otázka 2a) Pokud nastavíme průměr kružnice na 2 cm. Jaká bude délka kružnice? A kolikrát je tato délka větší než její průměr $\frac{o}{d}$?

Otázka 3a) Pokud nastavíme průměr kružnice na 3 cm. Jaká bude délka kružnice? A kolikrát je tato délka větší než její průměr $\frac{o}{d}$?

Závěr výzkumu

„Výsledky měření se od sebe mohou mírně lišit, nicméně hledané Ludolfovo číslo je pro všechny kružnice stejné, označujeme ho řeckým písmenem π (čteme pí): $\pi \approx 3,14$.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 27, cv. A). Délku kružnice neboli obvod (o) kružnice s průměrem (d) počítáme jako $o = \pi \cdot d$ nebo $o = \pi \cdot 2r$.

Ludolfovo číslo: „Číslo π nelze přesně zapsat desetinným číslem. Patří podobně jako např. $\sqrt{2}$ mezi iracionální čísla. Už v 16. století ho matematik a učitel šermu Ludolph van Ceulen (čteme kélen) vypočítal na 35 desetinných míst, proto se mu říká Ludolfovo číslo.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 27, cv. A)

Otázka 4a) Poloměr kružnice je 0,9 cm. Vypočítejte délku kružnice, svůj výpočet ověřte v appletu a). Při výpočtu na kalkulačce využíváme přesnější hodnotu čísla π, kterou vyvoláváme stisknutím tlačítka π. Jaký výsledek ukazuje vaše kalkulačka při použití tlačítka π (výsledek zaokrouhli na 5 desetinných míst)? Správná odpověď: 5,65487.

Otázka 1b) „Cyklistovy kilometry. Průměr kola je 65 cm. Po kolika otáčkách kola ukáže počítadlo ujetých kilometrů 1 ujetý kilometr?“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 29, cv. 4)

Úkol 1c) „Ve čtvercové síti je obsah jednoho čtverečku 1 cm^2. Vypočítejte obvod obrazců a)–d).“ (Odvárko & Kadleček, s. 29, cv. 5) Pohybovat můžete tahem červeným čtverečkem a černými půlkruhy.

Otázka 1c) Jaký je obvod obrazce a)?

Otázka 2c) Jaký je obvod obrazce b)?

Otázka 3c) Jaký je obvod obrazce c)?

Otázka 4c) Jaký je obvod obrazce d)?

Úkol 1d) Konstruujte kružnici se středem S vepsanou čtverci $ABCD$, ke konstrukci použij některé z nástrojů z nabídky (*Průsečík*, *Střed*, *Rovnoběžka*, *Kružnice daná středem a bodem*, *Kružnice daná středem a poloměrem*).

Otázka 1d) Zapište postup své konstrukce?

Otázka 2d) Jaký obvod má kružnice vepsaná, kterou jste sestrojili?

Řešení:

Otevřená otázka 1–3a) hodnoty se v závislosti na odchylkách při měření mohou lišit; za správné odpovědi považujeme hodnoty mezi 3,11–3,17 (nejlépe tedy 3,14). Žáky je vhodné upozornit na možnost přiblížení si ***Pravítka*** pomocí nástroje *Zvětšit*.

Otázka 4a) 5,65487

Otázka 1b) necelých 490 otáček

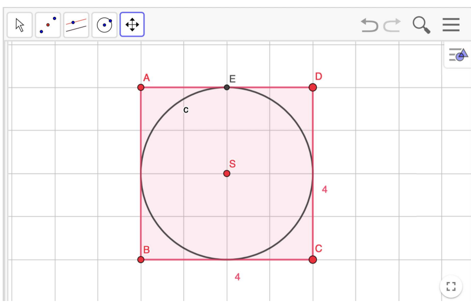
Otázka 1c) zaokrouhleno 10,28 (přesně $o = 2\pi + 4$)

Otázka 2c) zaokrouhleno 10,28 (přesně $o = 2\pi + 4$)

Otázka 3c) zaokrouhleno 12,28 (přesně $o = 2\pi + 6$)

Otázka 4c) zaokrouhleno 14,28 (přesně $o = 2\pi + 8$)

Úkol 1d)



Obrázek 61: Konstrukční úloha 1d) řešení (PL 8), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Otázka 1d) Způsobů konstrukce je více, uvádíme ten nejrychlejší: Konstruujeme $(k, S, 2\text{ cm})$ pomocí nástroje *Kružnice daná středem a poloměrem*.

Otázka 2d) zaokrouhleno 12,57 (4π)

5.9 Pracovní list pro učitele 9 – Válec a jeho síť

Kapitola: 3. Prostorové útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma síť válce

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/tahdbapr

Učivo: Prostorové útvary: rotační válec

Časová dotace: 45 min

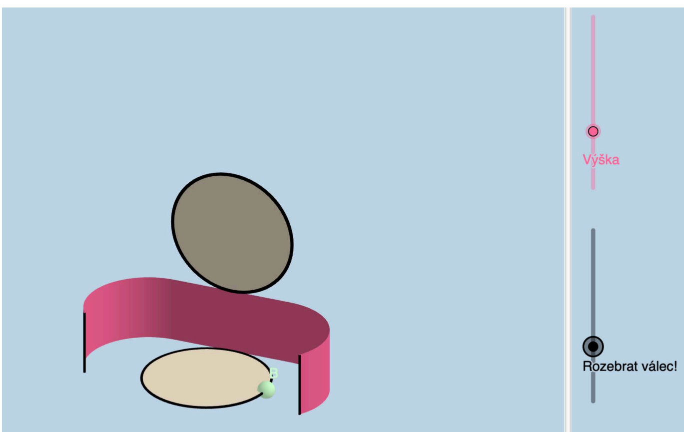
Metodický komentář: Žáci jsou nejprve seznámeni s objekty válcovitého tvaru kolem nás. Poté jsou uvedeny představy chlapce a dívky, kteří přemýšlejí o vzniku válce pomocí zvedání jeho podstavy směrem vzhůru nebo otáčení obdélníku/čtverce kolem osy. Tyto představy žáci zkoumají v interaktivních appletech. Následuje série otevřených a uzavřených otázek na téma válec. V další části konstruují síť válce konkrétních rozměrů a určují, z jakých částí je síť válce složena. V neposlední řadě řeší slovní úlohy z reálného života a na závěr jsou seznámeni s vzorcem na výpočet povrchu válce.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-04, M-9-3-09, M-9-3-10, M-9-3-11, M-9-3-13, M-9-4-02

Zadání pro učitele s řešením

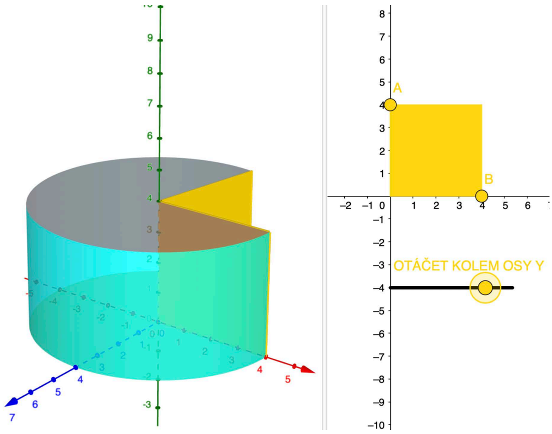
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



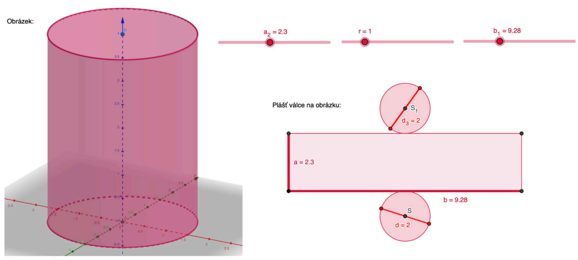
Obrázek 62: Síť válce (PL 9), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet b)



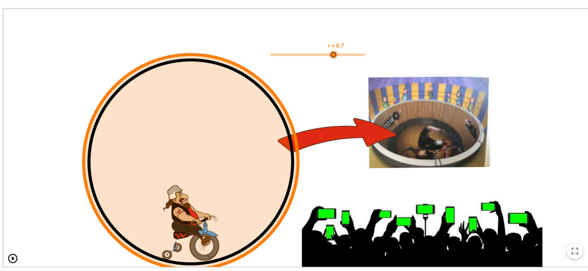
Obrázek 63: Rotační válec (PL 9), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet c)



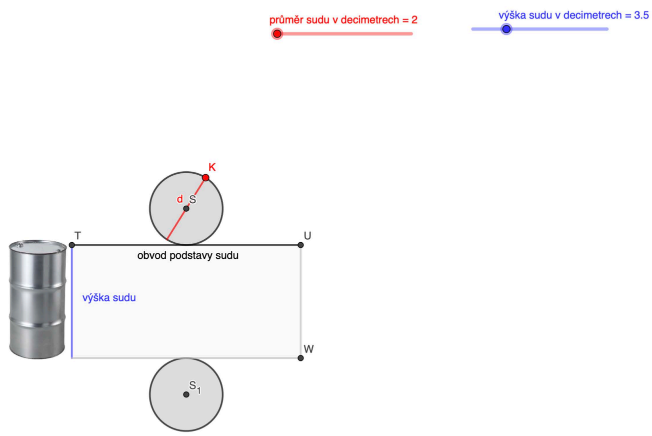
Obrázek 64: Síť válce 2 (PL 9), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet d)



Obrázek 65: Slovní úloha – Jízda smrti (PL 9), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet e)



Obrázek 66: Slovní úloha – Barvení sudů (PL 9), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1 Válcovité stavby

„Románská rotunda sv. Jiří a sv. Vojtěcha na hoře Říp pochází z roku 1126. Tato románská rotunda má tři části – hlavní loď, apsidu a věž. Hlavní loď má kruhový půdorys s průměrem 6,20 m. Průměr apsidy je 3,40 m. Věž má tvar válce s průměrem 2,62 m a výškou 15 m (Odvárko & Kadleček, 2013). “

Otázka 1) „Napadají vás objekty z vašeho okolí, které mají přibližný tvar válce, třeba i „dutého“?“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 38, cv. 2). Napište alespoň 3.

Úvodní text 1ab) Představy

A) „Karel: „Já si představuji, že válec vznikne zvedáním horní podstavy. Čím výš ji zvednu, tím větší výšku má válec.“

B) Karla: „Můj válec vzniká otáčením obdélníku. Při rychlém otáčení je ten válec přímo vidět, “ ukazuje Karla.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 38, cv. 2)

Úvodní text 1a) V appletu a) pohybujte tahem **bodem** *B*, **posuvníkem** *Výška a* **posuvníkem** *Rozebrat válec!* Pozorujte, co se děje, a odpovězte na otázky níže.

Úvodní text 1b) V appletu a) pohybujte tahem *body A*, *B* a **posuvníkem** *OTÁČET KOLEM OSY Y*, pozorujte, co se děje, a odpovězte na otázky níže.

Otázka 1ab) Karlova představa A) vznikla pozorováním appletu: . . .

Otázka 2ab) Karly představa B) vznikla pozorováním appletu: . . .

Otázka 3ab) Karlova představa A) začíná podstavou. Jaký tvar má podstava válce? Jaký tvar má plášť válce?

Otázka 4ab) Pokud bude Karla otáčet čtvercem kolem *osy* y, v jakém vztahu bude průměr (d) podstavy a výška válce (v)?

Otázka 1b) „Obdélník má rozměry 5 cm a 2 cm. Určete průměr d a výšku v válce, který vznikne otáčením tohoto obdélníku." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 38, cv. 5). Nápověda: V appletu b) pohybujte body A a B a svůj výsledek si ověřte v appletu.

Otázka 1c) „Na *Posuvnících* a, r a b nastavte rozměry pláště a podstavy zobrazovaného válce na obrázku." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 40, cv. 7). Do odpovědi zapište, jaké rozměry jste zvolili.

Otázka 2c) Délka strany a obdélníku, který tvoří plášť, je rovna: . . .

Otázka 3c) Délka strany b obdélníku, který tvoří plášť, je rovna: . . .

Otázka 4c) Délka r je rovna: . . .

Otázka 5c) Obvod kruhu, který tvoří podstavu válce, vypočítáme jako: . . .

Otázka 1d) „Jízda smrti. Na pouti jezdí motocyklista – kaskadér po vnitřní straně „pláště" velikého svislého válce. Po rozjetí krouží ve vodorovné rovině. Vnitřní průměr válce (průměr černé kružnice) je 8 m. Urči, kolik metrů ujede, když objede válec dvacetkrát. Odpověď zaokrouhlete na jednotky." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 41, kap. 2.1, cv. 13)

Otázka 1e) „Nátěr sudů. Učeň Karel natírá 10 uzavřených sudů. Každý sud má průměr 30 cm a výšku 45 cm. Karel koupil dvě plechovky barvy, každá plechovka stačí na 2 m^2 nátěru. Bude mít dost barvy na jeden nátěr všech 10 sudů, pokud dno nenatírá?" (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 41, kap. 2.2, cv. A). Do odpovědi uveďte postup řešení a v appletu nastavte správné rozměry sudu dle zadání na **posuvnících**.

Otázka 2f) Povrch válce spočítáme jako: . . .

Řešení:

Otázka 1) Odpovědi se mohou lišit, uvádíme několik příkladů: sklenička, rulička od toaletního papíru, sud, sloup . . .

Otázka 1ab) A) 1

Otázka 2ab) B) 2

Otázka 3ab) podstava je kruh, plášť tvoří obdélník

Otázka 4ab) B) $0,5d = v$

Otázka 1b) $d = 10$, $v = 2$

Otázka 1c) dvě správné odpovědi vzhledem k souřadnicovým osám; $a = 4$, $r = 1,5$, $b = 6,28$; $a = 6,28$, $b = 4$, $r = 1,5$

Otázka 2c) A) výšce válce v

Otázka 3c) C) obvodu (o) kruhu, který tvoří podstavu

Otázka 4c) B) poloměru kruhu, který tvoří podstavu válce

Otázka 5c) C) $o = \pi d$

Otázka 1d) $o = 502$ metrů

Otevřená otázka 1e) S (*jednoho sudu bez dna*) = $225\pi + 1\,350\pi = 4\,945{,}5\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}49455\ \mathrm{m}^2 \Rightarrow$ 10 sudů = $4{,}9455\ \mathrm{m}^2 \Rightarrow$ dvě plechovky nebudou stačit

Otázka 2f) C) $2\pi r^2 + 2\pi r v$

5.10 Pracovní list pro učitele 10 – Objem válce

Kapitola: 3. Prostorové útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma objem válce

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/ubgvmdtk

Učivo: Prostorové útvary: rotační válec

Časová dotace: 40 min

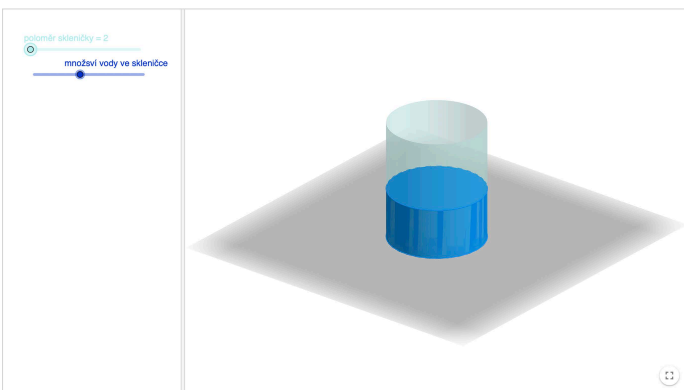
Metodický komentář: Žák v první části pracuje s modelem plnění skleničky vodou. Pokud je sklenička naplněna po okraj, voda v ní představuje objem skleničky. Žáci by měli pomocí appletu odvodit vzorec na výpočet objemu válce (obsah hladiny kruhového tvaru (S_p) stoupající do výšky (v)). V další části samostatně řeší úlohy z reálného života, počítají např. objem vody v bazénu. V poslední části pomocí GeoGebra nástrojů konstruují síť válce, počítají povrch sítě a objem konstruovaného válce.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-04, M-9-3-09, M-9-3-10, M-9-3-11, M-9-3-13, M-9-4-02

Zadání pro učitele s řešením

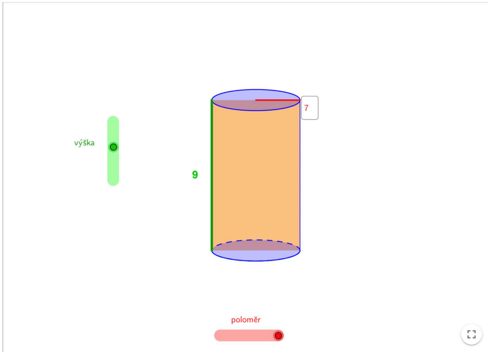
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



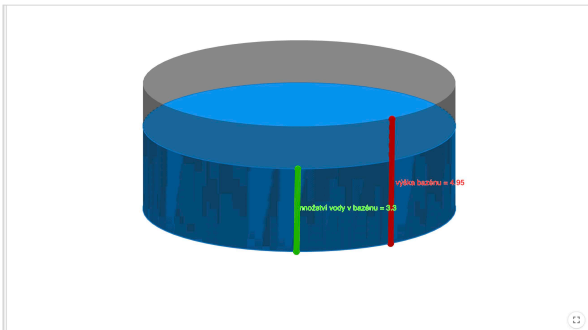
Obrázek 67: Objem vody ve skleničce (PL 10), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet b)



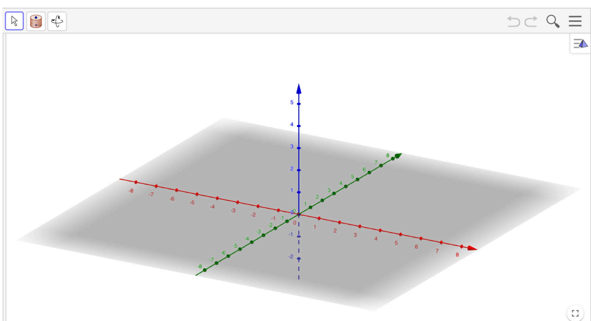
Obrázek 68: Objem válce (PL 10), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet c)



Obrázek 69: Slovní úloha – plnění bazénu (PL 10), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet d)



Obrázek 70: Konstrukční úloha – válec (PL 10), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Applet e)

Obrázek 71: Konstrukční úloha – síť válce (PL 10), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úkol 1a) Pomocí modelu plnění skleničky si vyzkoušejte nalít plnou skleničku vody. Použijte *Posuvník* a=2.

Otázka 1a) Voda ve skleničce naplněné po okraj tvoří:

Otázka 2a) Pozorně si prohlédněte, jak se voda ve skleničce pohybuje, a pokuste se odhadnout, jak by bylo možné vypočítat objem skleničky.

Úkol 1b) Na *Posuvnících* a=2 (*poloměr* a *výška*) nastavte rozměry válce $v = 10$ cm a $r = 4$ cm.

Otázka 1b) Po dokončení úkolu 1b) určete objem daného válce.

Úkol 1c) „Bazén a kbelík. Dvořákovi mají nový dětský bazén, už jim chybí jen přívod vody. Aleš se nabízí, že kbelíkem vodu do bazénu nanosí. Kolik kbelíků vody by musel přinést, pokud se do kbelíku vejde 7 litrů vody? Bazén má tvar válce o průměru 4 m, výška vody a bazénu je uvedena v appletu c) v decimetrech.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 46, cv. 5)

Otázka 1c) Kolik litrů vody je v bazénu, pokud hladina vody sahá do výšky 3,3 dm?

Otázka 2c) Jaký je objem celého bazénu?

Otázka 3c) Kolik kbelíků bude muset Aleš do bazénu nanosit, aby ho naplnil po okraj?

Úkol 1d) V appletu d) konstruujte válec pomocí nástroje *Válec* tak, aby jeho výška byla rovna 8 cm a poloměr 3 cm. Návod ke konstrukci: Nejprve umístěte kliknutím dva body (jejich vzdálenost = výška válce), poté do vyskakovací tabulky zadejte poloměr podstavy válce.

Úkol 1e) Konstruujte pomocí nástrojů (*Průsečík*, *Střed*, *Kolmice*, *Rovnoběžka*, *Mnohoúhelník*, *Kružnice daná středem a poloměrem*) síť válce, jehož podstavou je kruh k s poloměrem 0,5 a výškou daná **úsečka** AB. Také víme, že bod S je středem dolní podstavy válce.

Otázka 1e) Vypočítejte povrch válce, jehož síť jste konstruovali v appletu e). Do odpovědi uveďte postup.

Otázka 2e) Vypočítejte objem válce, jehož síť jste konstruovali v appletu e). Do odpovědi uveďte postup.

Řešení:

Otázka 1a) D) objem skleničky

Otázka 2a) C) V = plocha podstavy (S_p) · výška skleničky (v)

Otázka 1b) $V = 502{,}4\ \text{cm}^3$

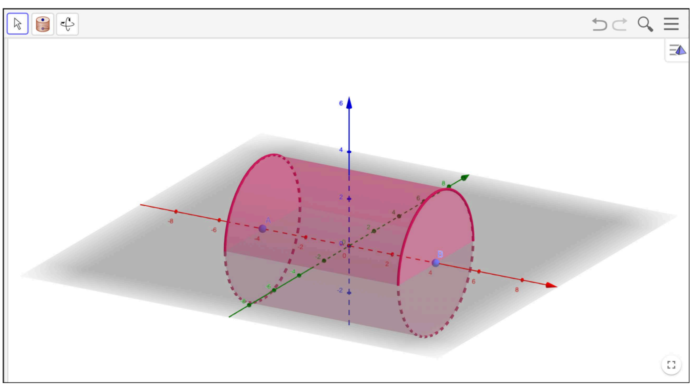
Úkol 1c) „Bazén a kbelík. Dvořákovi mají nový dětský bazén, už jim chybí jen přívod vody. Aleš se nabízí, že kbelíkem vodu do bazénu nanosí. Kolik kbelíků vody by musel přinést, pokud se do kbelíku vejde 7 litrů vody? Bazén má tvar válce o průměru 4 m, výška vody a bazénu je uvedena v appletu c) v decimetrech.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 46, cv. 5)

Otázka 1c) 41 448 l

Otázka 2c) $62{,}172\ \text{m}^3$

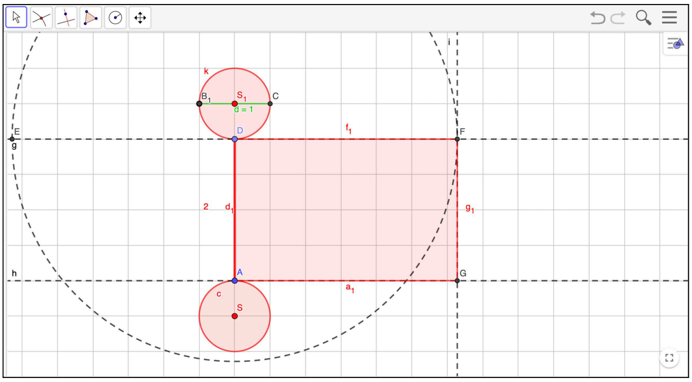
Otázka 3c) necelých 5 922 kbelíků

Úkol 1d)



Obrázek 72: Řešení – konstrukční úloha – válec (PL 10), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Úkol 1f)



Obrázek 73: Řešení – konstrukční úloha – síť válce (PL 10), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [01.03.2023])

Otázka 1e) $S = 0,5\pi + 2\pi \approx 7,85\ \mathrm{cm}^2$

Otázka 2e) $V = 0,5\pi \approx 1,57\ \mathrm{cm}^3$

5.11 Pracovní list pro učitele 11 – Dvě rovnoběžky

Kapitola: 3. Konstrukční úlohy

Popis aktivity: Cvičení na téma množina bodů dané vlastnosti – dvě rovnoběžky

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/qzn3mt6a

Učivo: Rovinné útvary: přímka, vzájemná poloha přímek v rovině; Konstrukční úlohy: množina všech bodů dané vlastnosti; Metrické vlastnosti v rovině: vzdálenost bodu od přímky

Časová dotace: 25 min

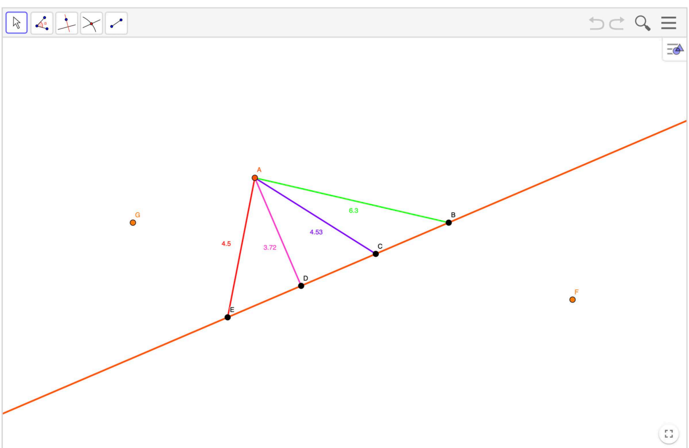
Metodický komentář: Žáci se v této aktivitě seznámí s množinou bodů dané vlastnosti. K objasnění pojmu využívá PL 11 GeoGebra funkci *Zobrazit stopu*, která demonstruje jeho význam. Žáci mají za úkol měřit vzdálenost bodu od přímky, seznámit se s pásmem rovnoběžek, jeho osou a vlastnostmi, odpovídat na otevřené a uzavřené otázky.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-05, M-9-3-13

Zadání pro učitele s řešením

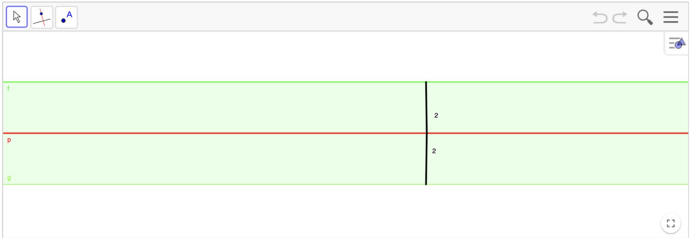
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



Obrázek 74: Vzdálenost bodu od přímky (PL 11), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet b)



Obrázek 75: Pás rovnoběžek (PL 11), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úkol 1a) V této aktivitě se budeme věnovat množině bodů, která má od přímky konstantní vzdálenost. Abychom mohli vzdálenost bodu od přímky zkoumat, budeme potřebovat hned několik GeoGebra nástrojů. 1) Vyberte nástroj *Úhel*, klikněte po řadě na body D, E, A. Zobrazí se úhel konkrétní velikosti. Takto zopakujte pro všechny zbývající body (CDA, BCA, ABC).

Otázka 1a) Abychom mohli změřit vzdálenost bodu od přímky, musíme sestrojit . . . procházející bodem, jehož vzdálenost od přímky chceme změřit.

Otázka 2a) „Rozhoduj a měř! Vyber správnou odpověď: Vzdálenost *bodu A* od *přímky p* je: . . . “ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 54, cv. A)

Úkol 1b)

1. Vyberte nástroj Bod a sestrojte tři body tak, aby jejich vzdálenost od **přímky** p byla větší než 2 cm.
2. Sestrojte tři body tak, aby jejich vzdálenost od **přímky** p byla menší než 2 cm.
3. Sestrojte tři body tak, aby jejich vzdálenost od **přímky** p byla právě 2 cm.

Otázka 1b) Vypište body (jejich název), které mají od **přímky** p vzdálenost větší než 2 cm. (Název bodu zobrazíte pravým kliknutím na bod a výběrem *Zobrazit popis* z vyskakovací nabídky).

Otázka 2b) Vypište body (jejich název), které mají od **přímky** p vzdálenost menší než 2 cm. (Název bodu zobrazíte pravým kliknutím na bod a výběrem *Zobrazit popis* z vyskakovací nabídky).

Otázka 3b) Vypište body (jejich název), které mají od **přímky** p vzdálenost právě 2 cm. (Název bodu zobrazíte pravým kliknutím na bod a výběrem *Zobrazit popis* z vyskakovací nabídky).

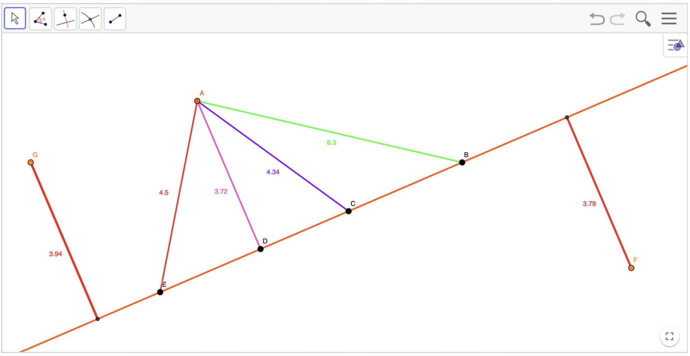
Otázka 4b) Množina všech bodů mající vzdálenost od přímky menší nebo rovnou 2 cm jsou . . .

Otázka 5b) Všechny body mající vzdálenost od přímky větší než 2 cm jsou . . .

Otázka 6b) Množina všech bodů mající vzdálenost od přímky právě 2 cm jsou . . .

Řešení:

Úkol 1a)

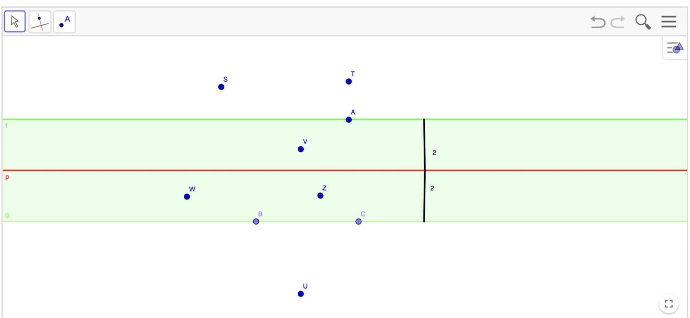


Obrázek 76: Řešení – vzdálenost bodu od přímky (PL 11), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Otázka 1a) E) kolmici

Otázka 2a) B) $|AD|$

Úkol 1b)



Obrázek 77: Řešení – pás rovnoběžek (PL 11), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Otázka 1b) S, T, U

Otázka 2b) V, W, Z

Otázka 3b) A, B, C

Komentář k 1–3b) Odpovědi je nutné kontrolovat individuálně kvůli názvům jednotlivých bodů, uvedené řešení se týká obrázku 77.

Otázka 4b) C) uvnitř zeleného pásu

Otázka 5b) A) mimo zelený pás

Otázka 6b) A) dvě rovnoběžky

5.12 Pracovní list pro učitele 12 – Kružnice a kruh

Kapitola: 1. Rovinné útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma množina bodů dané vlastnosti – kružnice kruh

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/qzn3mt6a

Učivo: Rovinné útvary: kružnice, kruh; Konstrukční úlohy: množina všech bodů dané vlastnosti

Časová dotace: 30 min

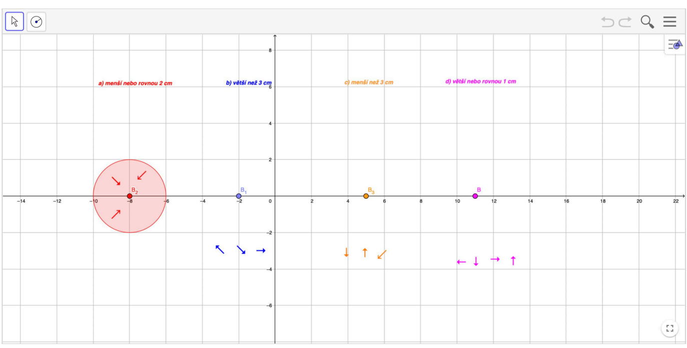
Metodický komentář: Žáci se v aktivitě seznámí s kružnicí a kruhem jako s množinami bodů dané vlastnosti. Žáci konstruují kružnice/kruhy a pomocí šipek určují, kde najdeme množinu všech bodů, která je od středu vzdálená o méně či více než o poloměr kružnice. V druhé části pracují s matematickou symbolikou a znaménky nerovnosti a rozhodují o pravdivosti uvedených tvrzení. Žáci se při práci v appletech učí pracovat s GeoGebra nástroji *Posuvník*, *Kružnice daná středem a bodem* a funkcemi *Zobrazit stopu* a *Animace*.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-02, M-9-3-05, M-9-4-01

Zadání pro učitele s řešením

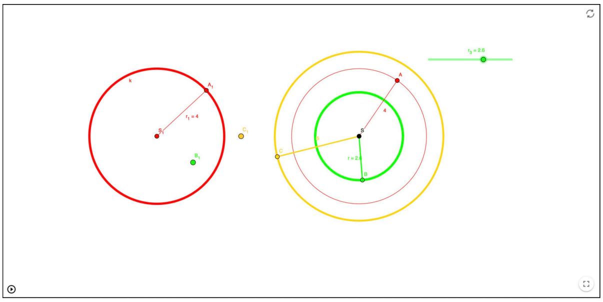
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



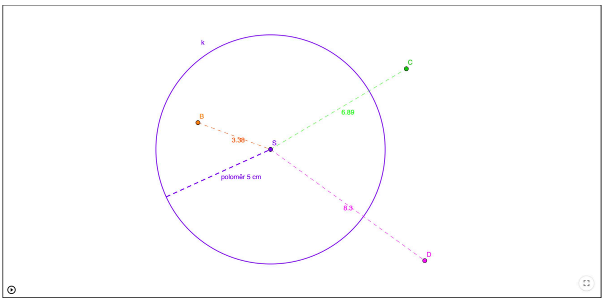
Obrázek 78: Množiny bodů dané vlastnosti (PL 12), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet b)



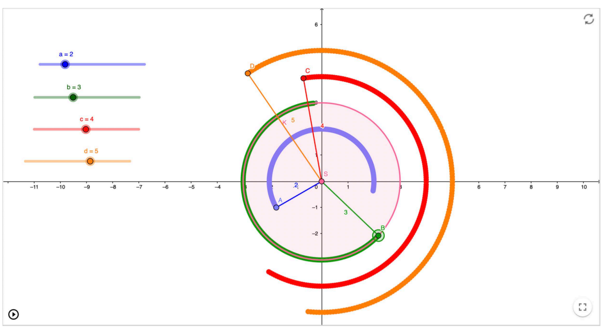
Obrázek 79: Množiny bodů dané vlastnosti 2 (PL 12), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet c)



Obrázek 80: Vzdálenost bodu od kružnice (PL 12), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet d)



Obrázek 81: Vzdálenost bodu od středu kružnice (PL 12), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1a) Dalšími množinami bodů dané vlastnosti jsou kružnice a kruh. Kružnice je množina bodů, která má od bodu (středu) konstantní vzdálenost (poloměr kružnice). Kruh je množinou bodů, která má od bodu (středu) vzdálenost menší nebo rovnou poloměru kruhu.

Úkol 1a) 1) Vyberte nástroj *Kružnice daná středem a poloměrem* a sestrojte kružnice dle zadání b)–d) se středy B_1, B, B_3.

Úkol 2a) Poté tahem přesuňte barevné šipky k jednotlivým kružnicím tak, aby označovaly danou množinu ze zadání b)–d). Jako ukázku, jak má konstrukce vypadat, jsme pro vás zpracovali zadání a). Nápověda: Pro vybarvení kruhu stačí pravým tlačítkem kliknout na kružnici, otevřít *Nastavení*, následně sekci *Barva* a na posuvníku *Neprůhlednost* nastavit vyšší číslo, než je nula.

Úkol 1b) „Kružnice k má střed S a poloměr 4 cm. Rozhodněte pomocí appletu b), zda platí otázky 1–4b) ." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 2). Pohybujte tahem body B a C dle zadání z otázek 1–4, své řešení ověřte na kružnici vpravo, k dispozici máte **posuvník** r, který mění vzdálenost bodu B od středu S.

Otázka 1b) „$|AS| = 4$ cm, proto A je prvkem kružnice k." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 2)

Otázka 2b) „$|SB| < 4$ cm, proto B je prvkem kružnice k." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 2)

Otázka 3b) „$|SC| = 5$ cm, proto C je prvkem kružnice k." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 2)

Otázka 4b) „S je prvkem kružnice k." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 2)

Otázka 1c) Doplňte do textu: „a) Každý bod, který má od bodu S vzdálenost . . . , patří kružnici k." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 3)

Otázka 2c) Doplňte do textu: „b) Žádný bod, jehož vzdálenost od bodu S je různá od . . . , kružnici k nepatří." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 3)

Otázka 1c) Doplňte do textu: „c) Kružnice k je množina všech bodů, které mají od bodu S vzdálenost . . . " (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 3)

Úkol 1d)

1. Nejprve pohybujte s barevnými *Posuvníky* . Každý z nich mění vzdálenost bodu A, B, C nebo D od bodu S (např. *Posuvník a* mění vzdálenost bodu A od S).
2. Spusťte animaci v levém dolním rohu, všechny body se dají do pohybu. S *Posuvníky* můžete pohybovat i během animace.
3. Zastavte animaci kliknutím znovu na tlačítko *Přehrát* v levém dolním rohu.
4. Klikněte pravým tlačítkem myši na libovolný bod, zobrazí se vyskakovací nabídka. Klikněte na *Zobrazit stopu* a následně na tlačítko *Přehrát* v levém dolním rohu.
5. Prohlédněte si množinu bodů, kterou svým pohybem vytváří.

Otázka 1d) $A \in K$, pokud ...

Otázka 2d) $B \notin$ kruhu K, pokud ...

Otázka 3d) $|SC| > 3$ cm, proto ...

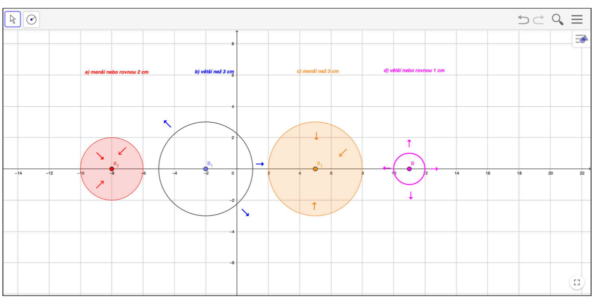
Otázka 4d) $|SD| \leq 3$ cm, proto ...

Otázka 5d) „Kružnice $k(S, r)$ je množina bodů X, které mají od bodu S vzdálenost $|SX| = \ldots$“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 4)

Otázka 6d) „Kruh $K(S, r)$ je množina bodů X, pro které platí, $|SX| = \ldots$“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 55, cv. 4)

Řešení:

Úkol 1–2a)



Obrázek 82: Řešení – množiny bodů dané vlastnosti (PL 12), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Otázka 1b) A) ano

Otázka 2b) B) ne

Otázka 3b) B) ne

Otázka 4b) B) ne

Otázka 1c) 5 cm

Otázka 2c) 5 cm

Otázka 1c) 5 cm/konstantní/stejnou (poloměr)

Otázka 1d) B) $|SA| \leq 3$ cm

Otázka 2d) C) $|SB| > 3$ cm

Otázka 3d) B) $C \notin K$

Otázka 4d) A) $D \in K$

Otázka 5d) r

Otázka 6d) menší nebo rovna r

5.13 Pracovní list pro učitele 13 – Osa úsečky, osa pásu

Kapitola: 1. Rovinné útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma osa úsečky, osa pásu

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/svs2nf7t

Učivo: Rovinné útvary: přímka, úsečka; Konstrukční úlohy: množina všech bodů dané vlastnosti – osa úsečky

Časová dotace: 35 min

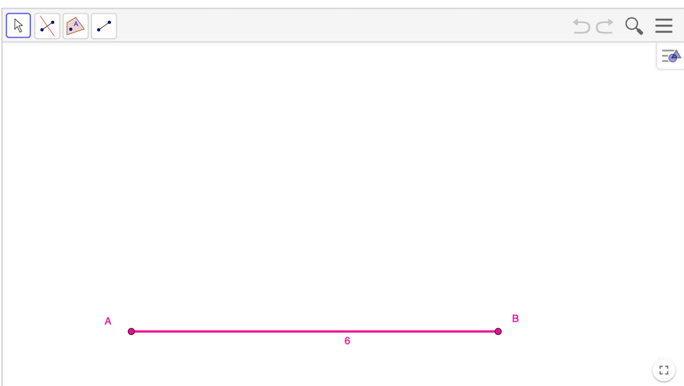
Metodický komentář: Žáci jsou v první části aktivity seznámeni s definicí osy úsečky. Jejich úkolem je osu dané úsečky konstruovat a měřit vzdálenost bodů na ose od krajních bodů úsečky. Pomocí návodu samostatně sestaví pohyblivý objekt (bod), pomocí kterého vlastnost „ověří" pro všechny body na ose. Dále odpovídají na otázky a seznamují se s dvojicí rovnoběžných přímek. Hledají množinu všech středů kružnic, které se dotýkají obou těchto rovnoběžek zároveň. V závěru aktivity naleznou žáci shrnutí a doplňující otázky, které ověří jejich znalosti.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-05

Zadání pro učitele s řešením

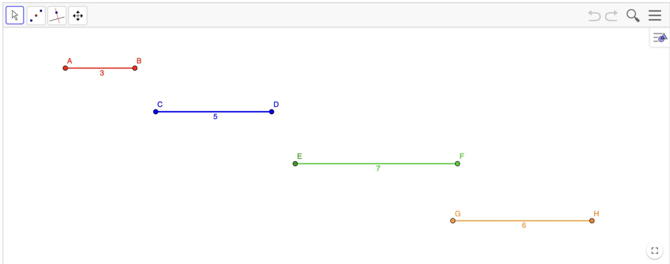
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



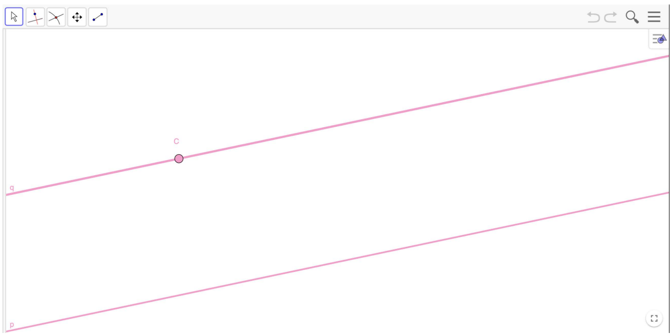
Obrázek 83: Konstrukční úloha – osa úsečky (PL 13), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet b)



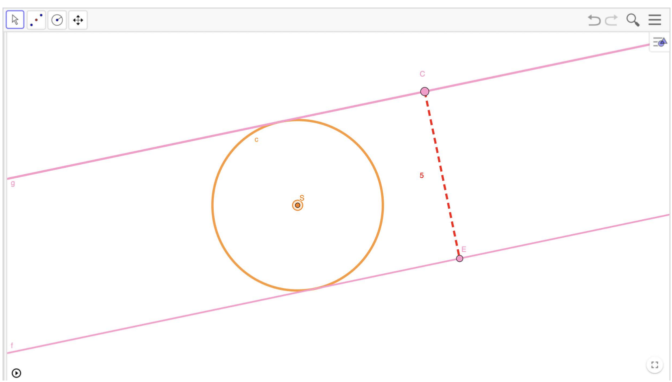
Obrázek 84: Konstrukční úloha 2 – osa úsečky (PL 13), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet c)



Obrázek 85: Konstrukční úloha – dvě rovnoběžky (PL 13), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet d)



Obrázek 86: Konstrukční úloha – množina středů všech kružnic dané vlastnosti (PL 13), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1a) „Osa úsečky je množina všech bodů, které mají od bodů A a B stejnou vzdálenost.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 56, cv. C)

Úkol 1a)

1. Pomocí nástroje *Osa úsečky* sestrojte osu **úsečky** AB.
2. Pomocí nástroje *Bod na objektu* sestrojte na ose úsečky libovolný bod a označte ho C (pravým kliknutím myši v sekci *Přejmenovat*).
3. Pomocí nástroje *Úsečka* sestrojte **úsečky** AC a BC a zobrazte jejich délku (délku úseček zobrazíte pravým kliknutím na úsečku a výběrem: *Nastavení* → *Zobrazit popis* → *Hodnota*).
4. Bodem C po ose tahem pohybujte a pozorujte vzdálenosti bodů $|AC|$ a $|CB|$.

Otázka 1a) Doplňte znaménko: $|AC| \ldots |CB|$.

Úkol 1b) Sestrojte množiny bodů, které mají od krajních bodů úseček AB, CD, EF, GH stejnou vzdálenost. K dispozici máte nástroje *Střed* a *Kolmice*.

Otázka 1b) Zapište postup konstrukce množin bodů z úkolu 1b). Jaký nástroj jste na konstrukci použili a proč?

Úkol 1c) Změřte vzdálenost dvou *rovnoběžek* p a q. K dispozici máte nástroje *Kolmice*, *Průsečík*, *Úsečka*.

Návod ke konstrukci:

1. Nejprve použijte nástroj *Kolmice*. Z bodu C sestrojte kolmici k oběma rovnoběžným přímkám p a q.
2. Použijte nástroj *Průsečík* k nalezení průsečíku kolmice a přímek p a q.
3. Pravým tlačítkem myši klikněte na kolmici, z nabídky odškrtněte *Zobrazit objekt*.
4. Použijte nástroj *Úsečka* ke konstrukci úsečky, jejíž krajní body jsou bod C a průsečík kolmice s přímkou p.
5. Klikněte pravým tlačítkem myši na úsečku, z nabídky vyberte *Nastavení* → *Zobrazit popis* → *Hodnota*.

Úkol 1d) „Vaším úkolem je nyní najít množinu všech středů kružnic, které se dotýkají zároveň **přímky** g i f." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 56, cv. 5)

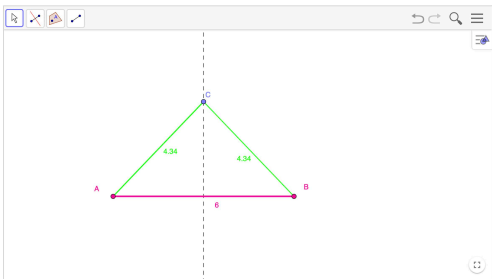
1. Pravým tlačítkem myši klikněte na **bod** S a zaškrtněte z vyskakovací tabulky *Zobrazit stopu*.
2. Spusťte animaci v levém dolním rohu a pozorujte.

Otázka 1d) Jaký geometrický objekt po zobrazení stopy a animace vzniká?

Úkol 2d) K dispozici máte několik nástrojů (*Střed*, *Kolmice*, *Osa úsečky*, *Kružnice daná středem a poloměrem*). Pokuste se sestrojit tuto množinu pomocí těchto nástrojů. Postup konstrukce zapište do odpovědi.

Řešení:

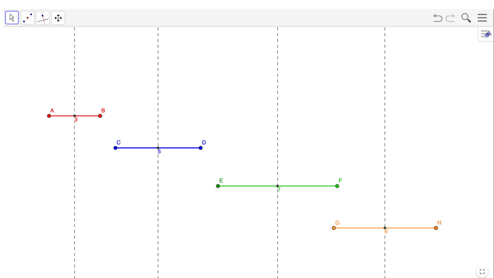
Úkol 1a)



Obrázek 87: Řešení konstrukční úlohy – osa úsečky (PL 13), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Otázka 1a) =

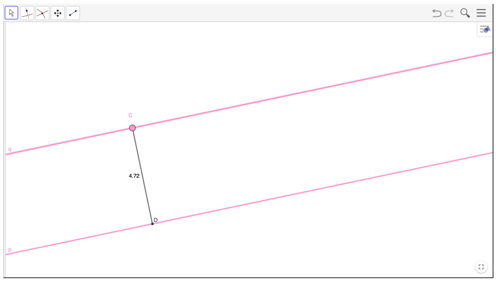
Úkol 1b)



Obrázek 88: Řešení konstrukční úlohy 2 – osa úsečky (PL 13), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

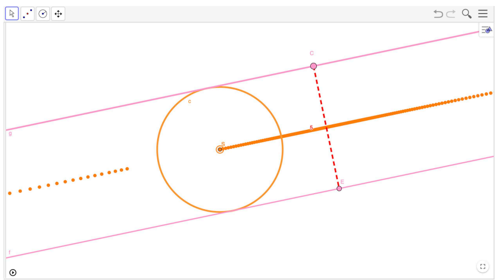
Otázka 1b) Nejprve jsem použil/a nástroj *Střed* k nalezení středu úsečky, následně jsem středem vedl/a kolmici k úsečkám.

Úkol 1c)



Obrázek 89: Řešení konstrukční úlohy – dvě rovnoběžky (PL 13), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Úkol 1d)



Obrázek 90: Řešení konstrukční úlohy – množina středů všech kružnic dané vlastnosti (PL 13), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Otázka 1d) Osa úsečky CE, zároveň osa pásu rovnoběžek q, f; množina bodů všech středů kružnic, které se obou rovnoběžek dotýkají právě v jednom bodě.

Úkol 2d) Postup se může u žáků lišit, uvádíme jako ukázku pouze jeden z nich:

1. Pomocí nástroje *Střed* sestrojíme střed úsečky CE
2. Pomocí nástroje *Kolmice* sestrojíme přímku kolmou na úsečku CE procházející středem této úsečky.

5.14 Pracovní list pro učitele 14 – Osa úhlu, mezikruží

Kapitola: 3. Konstrukční úlohy

Popis aktivity: Cvičení na téma osa úhlu, mezikruží

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/r4p7ckx5

Učivo: Rovinné útvary: přímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel; Konstrukční úlohy: množina všech bodů dané vlastnosti – osa úhlu

Časová dotace: 40 min

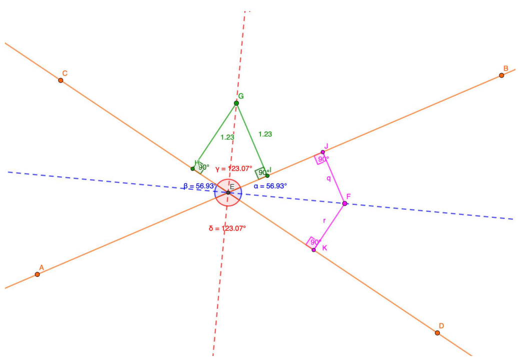
Metodický komentář: Žáci jsou seznámeni s dalšími množinami všech bodů dané vlastnosti – osou úhlu a mezikružím. V první části pozorují vlastnosti osy úhly a měří vzdálenosti bodů osy od ramen úhlu. Úkoly je vedou k vyvození závěru, že vzdálenost libovolného bodu na ose je od obou ramen stejná. V druhé části jsou seznámeni s GeoGebra nástrojem *Osa úhlu*, pomocí něj osy konstruují. Ve třetí části opět pracují s funkcí *Zobrazit stopu*, která jim pomůže objevit množiny všech středů kružnic mající s danou kružnicí vnější a vnitřní dotyk. V další části jsou seznámeni s pojmem mezikruží a jeho vlastnostmi. Vlastnosti této množiny opět objevují samostatně při práci v appletech. V závěru aktivity si ověří své znalosti v otázkách a slovní úloze.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-03, M-9-3-05, M-9-3-13

Zadání pro učitele s řešením

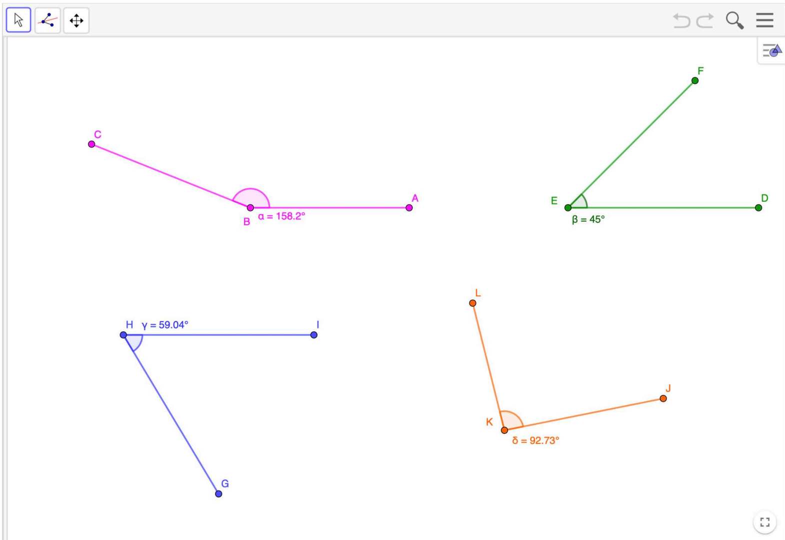
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



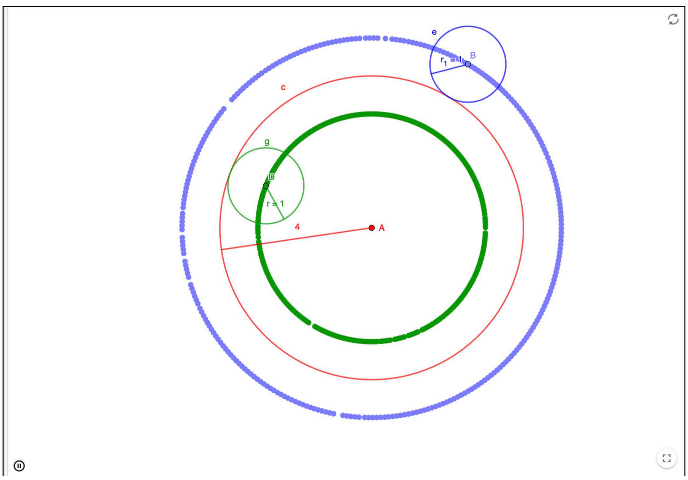
Obrázek 91: Osa úhlu (PL 14), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet b)



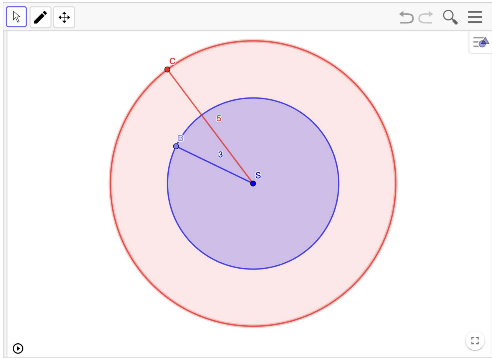
Obrázek 92: Konstrukční úloha – osa úhlu (PL 14), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet c)



Obrázek 93: Množina středů kružnic dané vlastnosti (PL 14), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet d)



Obrázek 94: Mezikruží (PL 14), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Applet e)

Obrázek 95: Slovní úloha (PL 14), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Otázka 1a) Nejprve v appletu pohybujte body G, F, A, B, C a D. Pozorujte a hledejte odpověď na otázku. „Bod F leží na ose o $\measuredangle KEJ$. Rozhodněte, který ze znaků >, =, < patří místo otazníku: $|FJ|?|FK|$? “ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 57)

Text 1a) „Osa úhlu s rameny na různoběžkách f, g a s vrcholem v jejich průsečíku E tvoří množinu všech bodů, které mají od různoběžek f, g stejné vzdálenosti.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 57)

Úkol 1b) Použijte nástroj *Osa úhlu* ke konstrukci množin všech bodů, které mají od různoběžek (ramen úhlů) stejné vzdálenosti. Tyto množiny najděte u úhlů LKJ, GHI, ABC, FED.

Otázka 1c) „Kružnice c se středem A má poloměr 4 cm. Jaký útvar vytvoří středy všech kružnic, které mají poloměr 1 cm a mají s kružnicí c vnější dotyk

(Odvárko & Kadleček, 2013, s. 57).“ Svou odpověď ověřte kliknutím na ikonu *Přehrát* v levém dolním rohu.

Otázka 2c) „Kružnice c se středem A má poloměr 4 cm. Jaký útvar vytvoří středy všech kružnic, které mají poloměr 1 cm a mají s kružnicí c vnitřní dotyk. (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 57).“ Svou odpověď ověřte kliknutím na ikonu *Přehrát* v levém dolním rohu.

Úkol 1d) Použijte nástroj *Pero* a vyznačte v appletu množinu všech bodů, které mají od bodu S vzdálenost větší než 3 cm nebo rovnou 3 cm a zároveň menší než 5 cm nebo rovnou 5 cm (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 57).

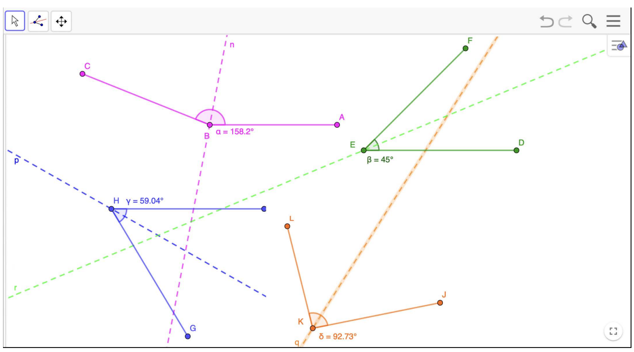
Otázka 1e) „Pepa si opravoval kolo a teď mu stále padá řetěz. Proto vymýšlí kolo bez řetězu: „Strany rovnoběžníku $OSKN$ budou kovové tyče. Moje noha šlápne na pedál N, klika NO a připojená tyč NK bude pohánět bod K okolo bodu S.“ Jaký geometrický útvar vytvoří bod K při popsaném pohybu? Délky tyčí se při pohybu nemění.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 58, cv. 11)

Úkol 1e) Svou odpověď ověřte pomocí appletu. Pravým tlačítkem myši klikněte na **bod** K, z vyskakovací nabídky vyberte *Zobrazit stopu* a následně klikněte na ikonu *Spustit* v levém dolním rohu.

Řešení:

Otázka 1a) B) =

Úkol 1b)



Obrázek 96: Řešení konstrukční úlohy – osa úhlu (PL 14), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [02.03.2023])

Otázka 1c) kružnice

Otázka 2c) kružnice

Otázka 1e) kružnice

5.15 Pracovní list pro učitele 15 – Architektův rébus

Kapitola: 2. Prostorové útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma obvod, obsah rovinných útvarů

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/ucksz3yn

Učivo: Rovinné útvary: trojúhelník, čtyřúhelník, rovnoběžník; Prostorové útvary: kvádr, krychle, jehlan

Časová dotace: 55 min

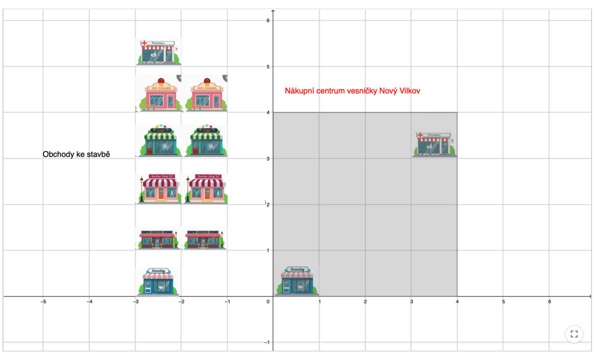
Metodický komentář: Žáci procvičují své znalosti o obvodu, obsahu, objemu a povrchu rovinných útvarů a těles pomocí slovních úloh z reálného života. Řeší komplexní problémy: např. pomáhají architektovi při plánování stavby nového městečka a nákupního centra, počítají finanční náklady na stavbu domů, množství střešní krytiny, která je potřebná na pokrytí střech domů nebo počítají obsahy zahrad. K dispozici mají nejen interaktivní 2D applety, ale také 3D objekty, které mohou otáčet a prohlížet ze všech stran. Celý pracovní list je doplněn o kontrolní otázky.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-04, M-9-3-09, M-9-3-10, M-9-3-13, M-9-4-02

Zadání pro učitele s řešením

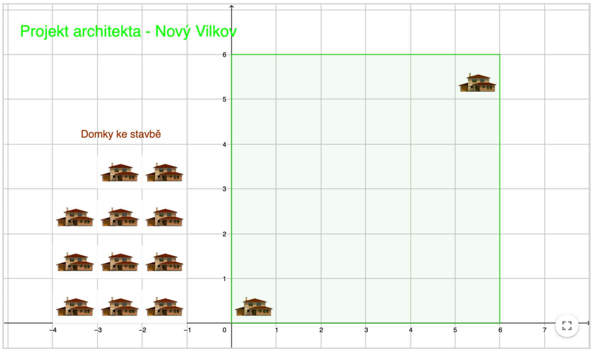
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



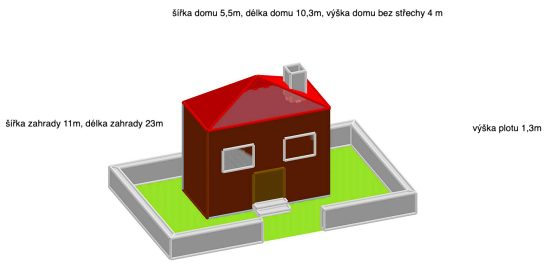
Obrázek 97: Slovní úloha – Nákupní centrum (PL 15), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Applet b)



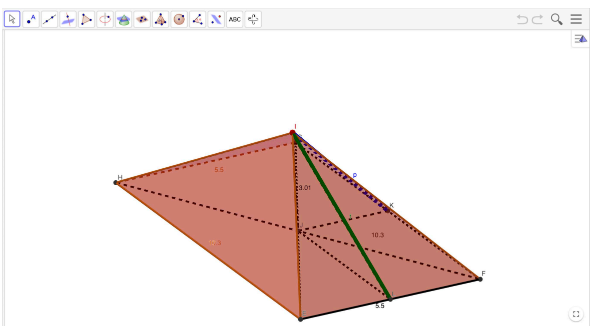
Obrázek 98: Slovní úloha – Výstavba domů (PL 15), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Applet c)



Obrázek 99: Slovní úloha – model domu (PL 15), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Applet d)



Obrázek 100: Slovní úloha – model střechy domu (PL 15), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úkol 1a) Město se rozhodlo zvelebit novou vesničku Nový Vilkov a rozšířit ji o nové obchody a služby. Vaším úkolem je pomoci architektům rozvrhnout umístění budov. **„Stavba má ale předem nastavená pravidla. V každé svislé i vodorovné řadě a v obou uhlopříčkách musí být dva obchody." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 9, kap. 1.1, cv. 13)**

Pokuste se umístit na celou mapku od každého obchodu alespoň jeden. Jedna prádelna a lékárna jsou již umístěny. Obchod přesunete tahem myši po *Nákresně*.

Otázka 1a) Jaký je obsah plochy vybrané pro nákupní centrum Nový Vilkov, pokud jeden obchod zabere plochu o rozměrech 50 × 50 m? Do odpovědi uveďte postup řešení.

Úkol 1b) Stavební firma se také rozhodla postavit nové domky na jednom z neobydlených pozemků tak, aby se do Nového Vilkova mohlo nastěhovat nové obyvatelstvo. Pozemek rozdělila na 36 menších pozemků (36 čtverečků - 1 čtvereček = velikost jednoho domu se zahradou). Protože se jedná o frekventovanou oblast, musí být nové městečko Vilkov průjezdné. **„Pravidlo je jasné, v každé vodorovné i svislé řadě i v obou úhlopříčkách celého pozemku mohou být pouze dva domy." (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 9, kap. 1.1, cv. 13)**

Zbytek pozemku budou tvořit silnice a další nutné průchozí oblasti. Pomozte architektovi rozestavit domky na pozemek tak, aby dodržel pravidla stavby.

Úvodní text 1c) V appletu c) naleznete přiblížený 3D model domku z appletu b), můžete si ho prohlédnout ze všech stran. Stačí kliknout myší kamkoliv do bílé prázdné plochy kolem domku, myš držet a pohybovat s ní. Dům se začne otáčet, prohlédněte si jeho nárys, půdorys a bokorys.

Otázka 1c) Jaký obsah spodní podstavy domu? Do řešení uveďte postup výpočtu.

Otázka 2c) Jaký je obsah zeleného pozemku, na kterém dům stojí? Do řešení uveďte postup výpočtu.

Otázka 3c) Kolik zaplatí majitelé domu za zatravnění volné plochy pozemku kolem domu, pokud je cena za 1 m^2 trávníku 185 Kč? Na trávník mají noví majitelé pozemku našetřeno 32 000 Kč, bude jim tato částka stačit, nebo musí ještě došetřit?

Úvodní text 1d) V appletu d) má architekt návrh speciální střechy tvaru čtyřbokého jehlanu, která bude na některých z nových domků. Střechu si důkladně prohlédněte pomocí tlačítka *Spustit otáčení*, které naleznete v pravém horním rohu. Pod ikonou se po kliknutí objeví *Posuvník*, na kterém můžete nastavit rychlost otáčení (rychlost 2 je optimální). Pokud znovu kliknete na stejné tlačítko, otáčení se zastaví.

Otázka 1d) Jaký geometrický útvar tvoří stěny jehlanu?

Otázka 2d) Jak počítáme obsah trojúhelníku?

Úvodní text 2d) Architekt nyní potřebuje pomoci s tvorbou cenové kalkulace na pokrytí střechy taškami (střešní krytina) pro budoucího majitele domu. Cena střešní krytiny je 210 Kč/m^2.

Otázka 3d) Jaká bude délka vyznačené přepony p pravoúhlého trojúhelníku IJK.

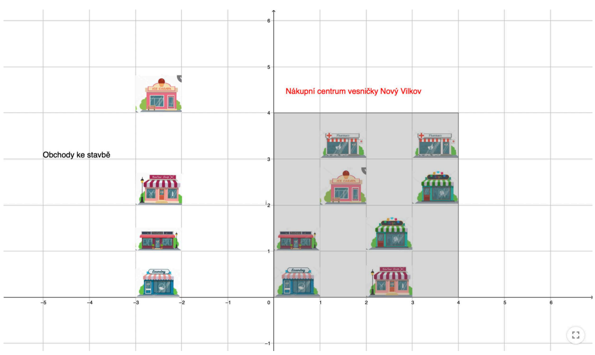
Otázka 4d) Jaká bude délka vyznačené přepony t pravoúhlého trojúhelníku IJL.

Otázka 5d) Jaký je obsah všech stěn střechy? Postup zaznamenejte do kolonky pro řešení.

Otázka 6d) Kolik zaplatí majitelé za pokrytí střechy taškami, pokud si firma za práci účtuje navíc 45 % z celkové ceny střešní krytiny, která je nutná na její pokrytí? Postup uveďte do řešení.

Řešení:

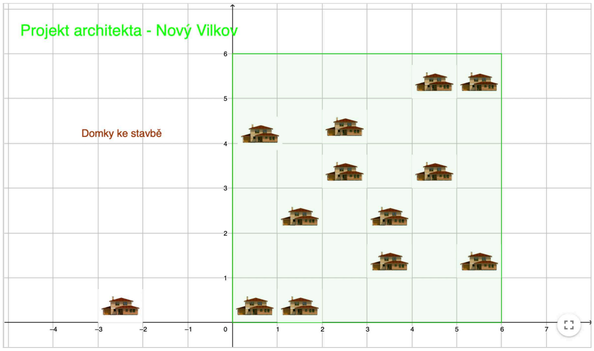
Úkol 1a)



Obrázek 101: Řešení slovní úlohy – Nákupní centrum (PL 15), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Otázka 1a) $50 \cdot 50 = 2\,500\ \text{m}^2$, $2\,500\ \text{m}^2 \cdot 16 = 40\,000\ \text{m}^2$

Úkol 1a)



Obrázek 102: Řešení slovní úlohy – Výstavba domů (PL 15), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Otázka 1c) $5{,}5\ \text{m} \cdot 10{,}3\ \text{m} = 56{,}65\ \text{m}^2$

Otázka 2c) $11\ \text{m} \cdot 23\ \text{m} = 253\ \text{m}^2$

Otázka 3c) $253\ \text{m}^2 - 56{,}65\ \text{m}^2 = 196{,}35\ \text{m}^2$, $196{,}35 \cdot 185 = 36\,325$ Kč

Otázka 1d) C) rovnoramenný trojúhelník

Otázka 2d) A) $\frac{a \cdot v_a}{2}$

Otázka 3d) $(3{,}01)^2 + (2{,}75)^2 = 9{,}0601 + 7{,}5625 = 16{,}6226$; $\sqrt{16,6226} \approx 4{,}1$ m

Otázka 4d) $(3{,}01)^2 + (5{,}15)^2 = 9{,}0601 + 26{,}5225 = 35{,}5826$; $\sqrt{35,5826} \approx 6$ m

Otázka 5d) $5{,}5 \cdot 6 + 10{,}3 \cdot 4{,}1 = 33 + 42{,}23 = 75{,}23\ \text{m}^2$

Otázka 6d) $75{,}23 \cdot 210 = 15\,799$ Kč $+ 7\,109$ Kč $= 22\,908$ Kč

5.16 Pracovní list pro učitele 16 – Zahrádka

Kapitola: 1. Rovinné útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma Jordanova teorie míry

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/dnuypv2x

Učivo: Rovinné útvary: čtyřúhelník, rovnoběžník, mnohoúhelníky

Časová dotace: 40 min

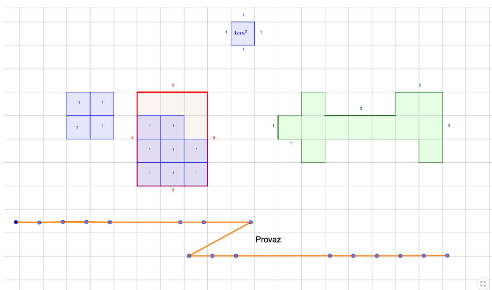
Metodický komentář: Hlavním cílem tohoto PL je žákům objasnit rozdíly mezi pojmy obvod a obsah geometrického útvaru. Žáci procvičují výpočet obsahu a obvodu u rovinných útvarů. Mají možnost vyzkoušet si měření obvodů pomocí provazu a obsahů pomocí čtvercové sítě. Zároveň je aktivita vede k seznámení se s intuitivním využitím Jordanovy teorie míry[30], s „jádrem a obalem" měřitelného útvaru.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-04, M-9-3-13

Zadání pro učitele s řešením

Interaktivní applety k aktivitě:

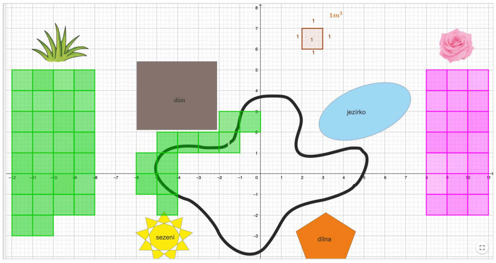
Applet a)



Obrázek 103: Slovní úloha – obvod a obsah (PL 16), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

[30] „Na metodě měření plošného obrazce pomocí čtvercové sítě je založena myšlenka Jordanovy-Peanovy míry (Camille Jordan. 1838–1922, Giuseppe Peano, 1858–1932). Součet obsahů S1 všech čtverců, jejichž všechny body náleží měřenému útvaru a součet obsahů všech čtverců, které mají s útvarem společný alespoň jeden bod. Pokud čtvercovou síť neomezeně zjemňujeme, konvergují tyto součty k hodnotám, z nichž první nazýváme vnitřní Jordanova-Peanova míra, druhou pak vnější Jordanovu-Peanovu míru daného útvaru. Jestliže jsou tyto hodnoty stejné, nazývá se daná množina měřitelná v Jordanově-Peanově smyslu (Schwabik, Šarmová, 1996, s. 54–69), (Hašek, 2017, s. 50–51)."

Applet b)



Obrázek 104: Slovní úloha – sázení záhonu (PL 16), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1) V malé okouzlující vesničce Revello žije Francesca se svou rodinou. Vesnička je ve výšce 350 m n. m. a je typická půvabem její krajiny. Mnoho evropských umělců sem přijíždí hledat inspiraci. I Francesca se rozhodla zvelebit svou zahrádku a vysázet zde několik rostlin dle plánku, který si vytvořila níže (applet b)). Revello je obec (vesnička) v provincii Cuneo v italském regionu Piemont, který se nachází asi 50 kilometrů (31 mil) jihozápadně od Turína a asi 30 kilometrů (19 mil) severozápadně od Cuneo.

Otázka 1a) Pokud je 50 km přibližně 31 mil a 30 km přibližně 19 mil, kolik je 1 míle kilometrů? Do odpovědi uveďte postup a počet kilometrů zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

Úvodní text 1a) Protože budeme Francesce se sázením zahrady pomáhat, je třeba zopakovat výpočet obvodu a obsahu rovinných útvarů. Vyzkoušejte své znalosti v otázkách 1–5a).

Otázka 1a) Jaký je obsah červeného obdélníku?

Otázka 2a) Jaký je obsah zeleného geometrického objektu? Ke zjištění použijte modré čtverečky s číslem 1 uprostřed. Tahem myši je můžete libovolně přesouvat.

Otázka 3a) Jaký je obvod zeleného geometrického objektu? Ke zjištění použijte provaz.

Otázka 4a) Jaký je obvod červeného obdélníku? Do odpovědi uveďte postup.

Otázka 5a) Je možné, aby měly dva geometrické objekty stejný obsah a přitom jiný obvod?

Úkol 1b) Vaším úkolem je pokračovat v sázení trávy (zelených čtverečků). Cílem je kompletně pokrýt celou plochu ohraničenou černou uzavřenou křivkou po jejím obvodu. Do zbylých míst uprostřed plochy zasaďte růže (růžové čtverečky). Pozor! Všechny čtverečky na sebe musí navazovat (roh na roh, strana na stranu). Dodržujte řádky a sloupce stejně jako Francesca, když sázela první část trávníku kolem domu.

Otázka 1b) A máme vysázeno! Kolik m^2 trávníku jste na překrytí černé uzavřené křivky potřebovali?

Otázka 2b) Kolik m^2 růží bylo třeba vysázet k vyplnění zbylého prostoru uvnitř plochy ohraničené černou uzavřenou křivkou?

Otázka 3b) Jaký je celkový obsah nově vysázené plochy (vysázené růže a trávník dohromady)? Do odpovědi uveďte také postup řešení.

Otázka 4b) Jaký je přesný obsah plochy ohraničené černou uzavřenou křivkou, bohužel nyní nejsme schopni určit. Můžeme se ale k přibližné hodnotě jejího obsahu přiblížit pomocí obsahů ploch, které již z předchozích otázek známe. Vyberte z nabídky správná tvrzení.

Řešení:

Otázka 1a) 50 : 31 ≈ 1,6

Otázka 1a) A) 0,12 dm^2

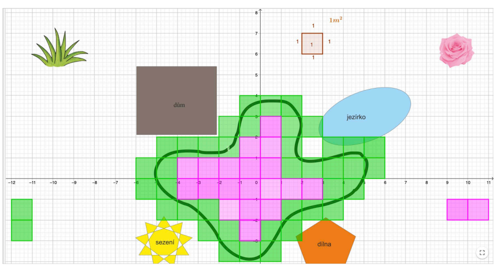
Otázka 2a) C) 0,0012 m^2

Otázka 3a) C) 0,24 m

Otázka 4a) 6 + 8 = 14 cm

Otázka 5a) ano

Úkol 1b)



Obrázek 105: Řešení slovní úlohy – sázení záhonu (PL 16), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Otázka 1b) 39 m^2

Otázka 2b) 19 m^2

Otázka 3b) $39 + 19 = 58$ m^2

Otázka 4b) A) Obsah celé plochy ohraničené černou uzavřenou křivkou je větší než obsah vysázené plochy růžemi; D) Obsah celé nově vysázené plochy (růže + trávník) je větší než obsah plochy ohraničené černou uzavřenou křivkou; E) obsah nově vysázené plochy (trávník + růže) > obsah plochy ohraničené černou uzavřenou křivkou > obsah vysázené plochy růžemi.

5.17 Pracovní list pro učitele 17 – Trojúhelník

Kapitola: 4. Metrické vlastnosti v rovině

Popis aktivity: Cvičení na téma konstrukce trojúhelníku

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/x9gxngmu

Učivo: Rovinné útvary: trojúhelník; Metrické vlastnosti v rovině: trojúhelníková nerovnost

Časová dotace: 35 min

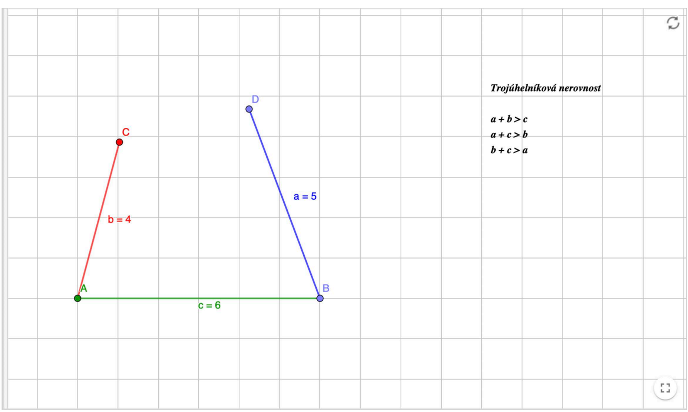
Metodický komentář: Žáci v první části uplatní své znalosti o trojúhelníkové nerovnosti a ověří pomocí interaktivního appletu, zda je možné zadaný trojúhelník konstruovat. Následně samostatně konstruují trojúhelníky, rozhodují o počtu řešení úloh a po konstrukci svůj postup zaznamenávají do odpovědí na otázky.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-13

Zadání pro učitele s řešením

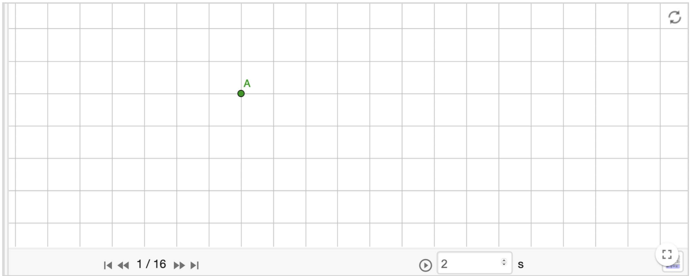
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



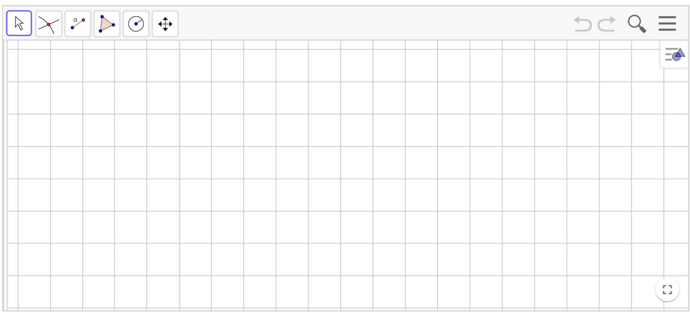
Obrázek 106: Trojúhelníková nerovnost (PL 17), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Applet b)



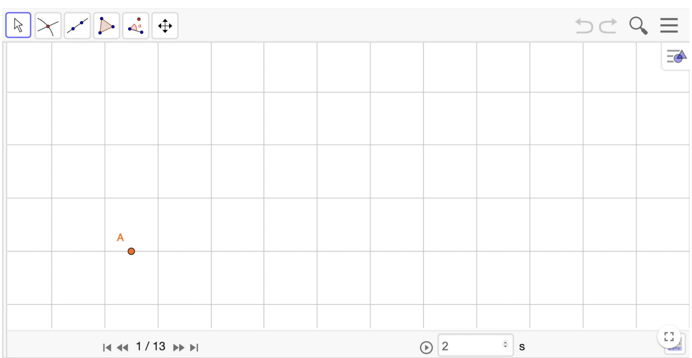
Obrázek 107: Konstrukční úloha – trojúhelník ze tří stran (PL 17), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Applet c)



Obrázek 108: Konstrukční úloha – trojúhelník ze tří stran 2 (PL 17), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Applet d)



Obrázek 109: Konstrukční úloha – trojúhelník z jedné strany a dvou úhlů k ní přilehlých (PL 17), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Otázka 1a) „**Trojúhelník ze tří stran**: Chceme sestrojit trojúhelník ABC, který má délky stran $a = 5$ cm, $b = 4$ cm a $c = 6$ cm. Nejprve v appletu a) ověřte, zda trojúhelník s danými délkami stran existuje (využijte trojúhelníkovou nerovnost). Body C a D tahem umístěte tak, aby vznikl zadaný trojúhelník. Do odpovědi zapište ověření existence trojúhelníku výpočtem (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 58, cv. A).“

Otázka 1b) V appletu b) klikněte na ikonu spustit v levém dolním rohu a pozorujte postup konstrukce. Je tento postup správný?

Otázka 2b) Kolik řešení má úloha z otázky 1b)?

Úkol 1c) Podle postupu konstrukce sestrojte trojúhelník KLM.

1. KL; $|KL| = 7$ cm
2. k; $k(K, 5\text{ cm})$
3. l; $l(L, 6\text{ cm})$
4. M; $M \in k \cap l$ (čteme bod M je prvkem průniku kružnic k a l)
5. $\triangle KLM$

Ke konstrukci použijte nástroje z horní lišty appletu c). K dispozici jsou nástroje *Úsečka s pevnou délkou*, *Kružnice daná středem a poloměrem*, *Průsečík* a *Mnohoúhelník*.

Úvodní text 1d) „Trojúhelník z jedné strany a dvou úhlů k ní přilehlých: Nejprve klikněte v pravém dolním rohu appletu d) na ikonu Spustit a prohlédněte si konstrukci trojúhelníku ABC, jehož strana c měří 7 cm, úhel $\alpha = 45°$, $\beta = 65°$. “ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 59, cv. B)

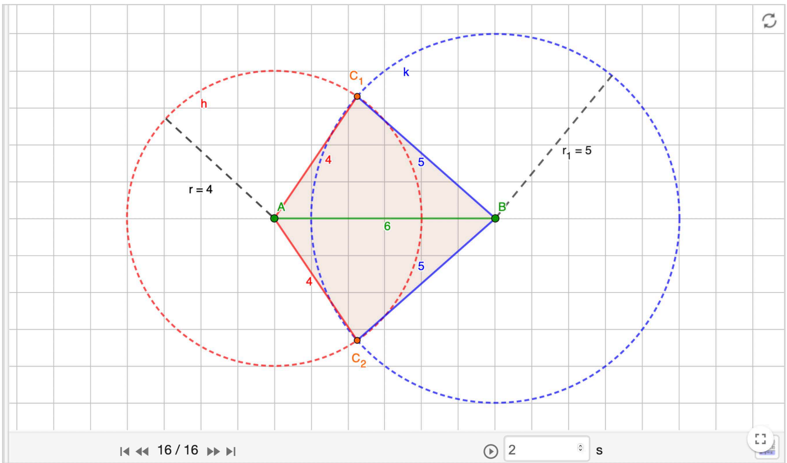
Úkol 1d) Pomocí nástrojů *Úhel dané velikosti*, *Přímka* a *Průsečík* sestrojte trojúhelník DEF, jehož strana $f = 5$ cm, úhel δ (při vrcholu D) $= 60°$ a úhel $\epsilon = 70°$ (při vrcholu E).

Otázka 1d) Do odpovědi zapište postup konstrukce.

Řešení:

Otázka 1a) $5 + 4 > 6$; $4 + 6 > 5$; $5 + 6 > 4$

Úkol 1a)

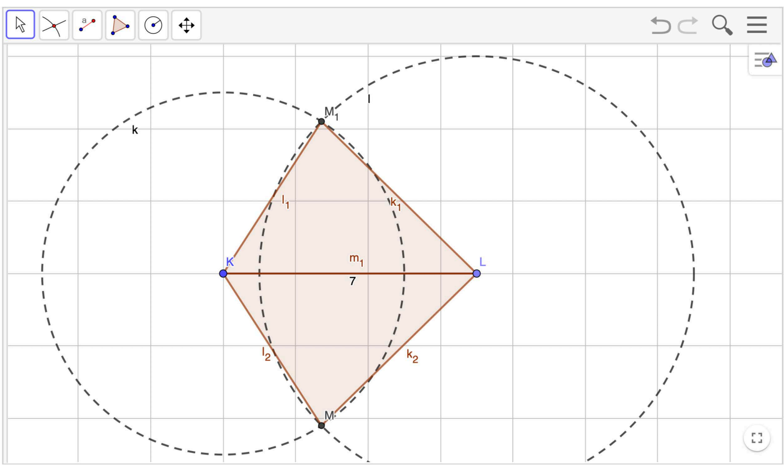


Obrázek 110: Řešení konstrukční úlohy – trojúhelník ze tří stran (PL 17), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Otázka 1b) A) ano

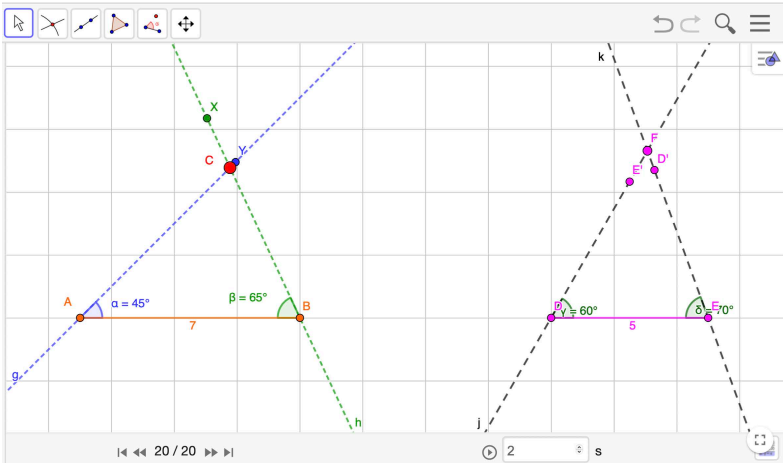
Otázka 2b) 2

Úkol 1c)



Obrázek 111: Řešení konstrukční úlohy – trojúhelník ze tří stran 2 (PL 17), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Úkol 1d)



Obrázek 112: Řešení konstrukční úlohy – trojúhelník ze dvou úhlů a strany (PL 17), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Otázka 1d) Postup konstrukce je k dispozici v odkazu na PL pro žáky.

5.18 Pracovní list pro učitele 18 – Sluneční soustava

Kapitola: 1. Rovinné útvary

Popis aktivity: Cvičení na téma sluneční soustava – matematika kolem nás

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/cawrvqfr

Učivo: Rovinné útvary: kružnice, kruh; Prostorové útvary: rotační kužel

Doporučení: PL obsahuje pojmy elipsa a kuželosečka, které nejsou součástí učiva RVP ZV pro 8. ročník, proto ho doporučujeme zadávat např. žákům nadaným

Časová dotace: 20 min

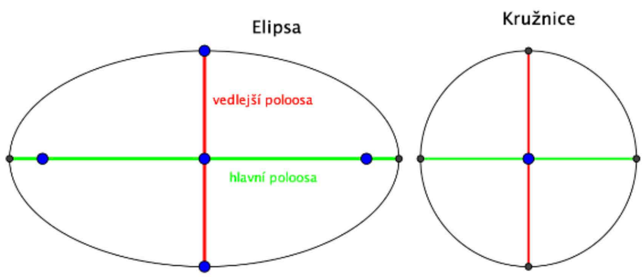
Metodický komentář: Žáci si v úvodu pustí video o planetách sluneční soustavy. Po zhlédnutí odpovídají na otázky. Následně je uveden zjednodušený model Sluneční soustavy a jsou představeny oběžné dráhy planet, které mají eliptický tvar. Žáci se tedy seznámí s pojmem elipsa a na 3D modelu si prohlédnou řezy kuželem. Zaveden je také pojem kuželosečka. Následně žáci měří vzdálenost planet od Slunce pomocí měřítka a zjednodušeného modelu Sluneční soustavy.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-13, M-9-4-02

Zadání pro učitele s řešením

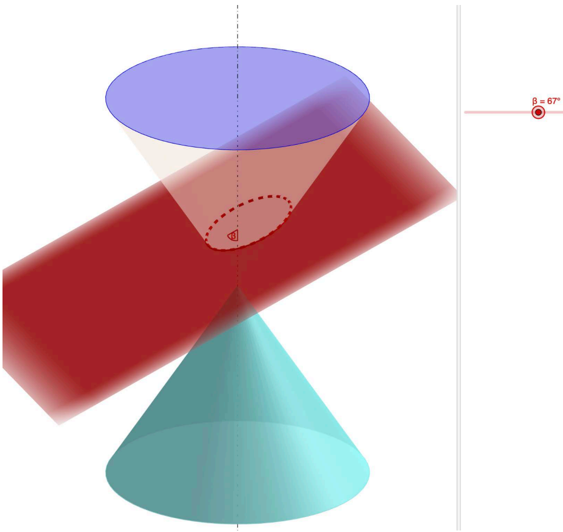
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



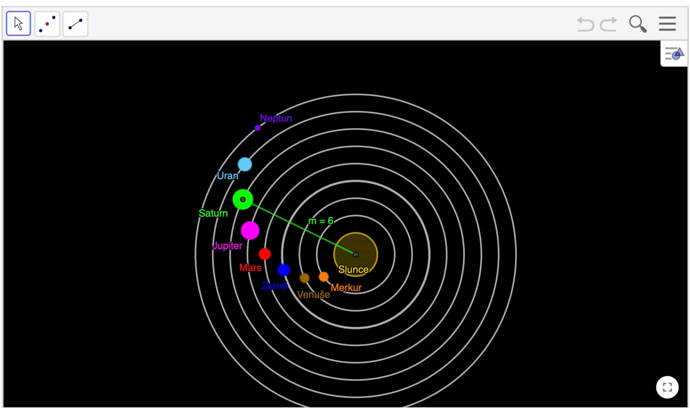
Obrázek 113: Elipsa a kružnice (PL 18), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Applet b)



Obrázek 114: Řez kuželem (PL 18), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Applet c)



Obrázek 115: Zjednodušený model sluneční soustavy (PL 18), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [03.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úvodní text 1) Sluneční soustava: Tento systém tvoří 8 planet, 5 trpasličích planet a přes 150 měsíců. Nejvíce měsíců mají planety Jupiter, Saturn, Uran a Neptun.

Dále zde nalezneme menší tělesa jako planetky, komety, meteoroidy a mnoho dalšího. Slunce je pomyslným centrálním bodem sluneční soustavy. Vlivem gravitačních sil úměrných sluneční hmotnosti je k němu celá soustava vázána.

Úkol 1) Pusťte si video a) a dobře poslouchejte, na otázkách a) b) a c) si ověřte své znalosti.

Video: https://youtu.be/-kiGRSIxu0A

Otázka a) Která planeta Sluneční soustavy je ze všech nejmenší?

Otázka b) Na které planetě je vzduch pro člověka jedovatý?

Otázka c) Z čeho se skládají komety?

Úvodní text 2) Nyní blíže prozkoumejme model Sluneční soustavy, který vidíte v appletu c). Tento model je zjednodušený. Planety Sluneční soustavy obíhají po eliptických drahách (v appletu c) jsou pro jednoduchost použity kružnice). Kružnice a elipsa jsou příbuzné křivky, obě patří do rodiny tzv. kuželoseček, protože je získáme řezem rotační kuželové plochy rovinou. Kružnice je množina všech bodů, které jsou od středu vzdálené o poloměr, elipsa je také množinou bodů, které ale nejsou od středu vzdálené stejně. Rozdíl vzdáleností si můžete prohlédnout v appletu a). Hlavní poloosa je u elipsy delší než vedlejší poloosa, u kružnice jsou červená i zelená úsečka stejně dlouhé.

Úkol 2b) Applet b) zobrazuje řez (červená rovina) kužele rovinou, při kterém vznikají zmíněné kuželosečky (elipsa a kružnice). Pohybujte červeným *Posuvníkem* a=2, pozorujte, co se děje s červenou rovinou a odpovězte na otázky níže.

Otázka 1b) Jaký úhel nastavíte na posuvníku, aby vznikla kružnice?

Otázka 2b) Jaký úhel nastavíte na posuvníku, aby vznikla elipsa?

Úkol 1c) Vaším úkolem je určit přibližnou reálnou vzdálenost konkrétní planety od Slunce. K dispozici máte dva nástroje *Střed* a *Úsečka*. Při hledání skutečných vzdáleností ti pomůže příklad, který je v appletu c) uveden (vzdálenost: Saturn a Slunce).

Tip: K nalezení délky $m = 6$ jsme nejprve vybrali nástroj *Střed*, následně klikli na planetu Saturn. Našli jsme tak „střed" této planety, který jsme spojili se Sluncem pomocí nástroje *Úsečka*. Pro zobrazení délky této úsečky jsme na ni pravým tlačítkem myši klikli a z nabídky vybrali *Nastavení* ⟶ *Zobrazit popis* ⟶ *Hodnota*.

Úkol 2c) Jaká je tedy skutečná vzdálenost Saturnu od Slunce? Pokud je měřítko 1 : 238 200 000 km.

planeta	měřítko
Země	1 : 49 866 666
Mars	1 : 56 975 000
Jupiter	1 : 155 660 000

Urči všechny zbývající vzdálenosti planet od Slunce.

Řešení:

Otázka a) C) Merkur

Otázka b) D) Venuše

Otázka c) A) z kamení a ledu

Otázka 1b) 90°

Otázka 2b) mezi 43°–89°

Úkol 2c) Země – 149 600 000 km, Mars – 227 900 000 km, Jupiter – 778 300 000 km, Saturn – 1 429 200 000 km.

5.19 Pracovní list pro učitele 19 – Souhrnná cvičení 1

Kapitola: 5. Souhrnná cvičení

Popis aktivity: Online test na téma shrnutí geometrie 8. ročník

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/xgquaaf2

Učivo: Rovinné útvary: kružnice, kruh; přímka, úsečka, čtyřúhelník, úhel; Metrické vlastnosti v rovině: vzdálenost bodu od přímky; Konstrukční úlohy: množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice)

Časová dotace: 45 min

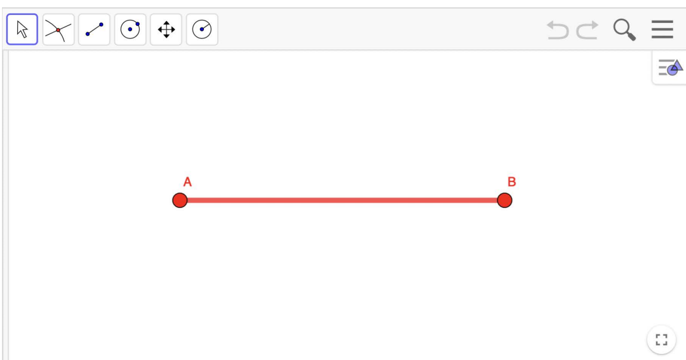
Metodický komentář: Tento pracovní list je určen jako test či cvičení shrnující učivo geometrie pro 8. ročník. Žáci pracují na šesti komplexních konstrukčních úlohách, do odpovědí následně zapisují postup konstrukce a odpovídají na otevřené otázky. V první úloze dělí úsečku na 4 shodné části, v úlohách 1b)–1d) konstruují kružnice, úhel, tečny a hledají střed kružnice pomocí tětivy kružnice. Úkol 1e) zahrnuje konstrukci plánku zahrady dle měřítka. V posledním úkolu hledají žáci kružnice s daným poloměr a vnějším dotykem se dvěma zadanými kružnicemi.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-02, M-9-3-03, M-9-3-05, M-9-3-06, M-9-3-13, M-9-4-01

Zadání pro učitele s řešením

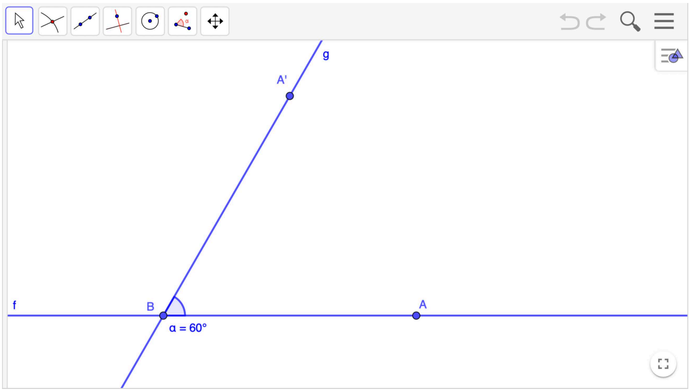
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



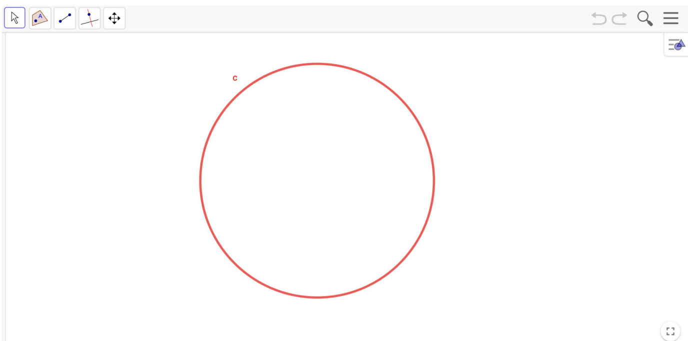
Obrázek 116: Dělení úsečky (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet b)



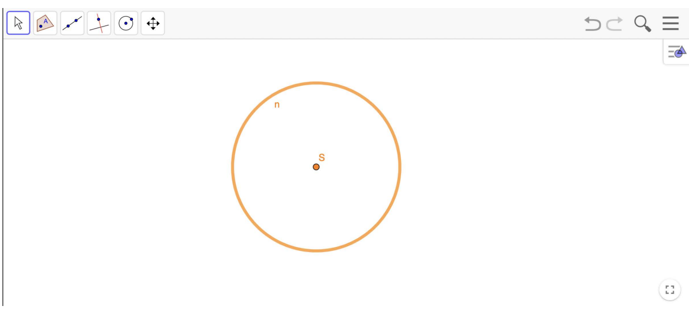
Obrázek 117: Tečny kružnice a úhel (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet c)



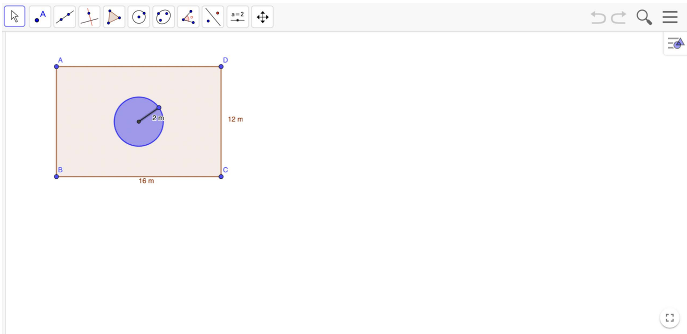
Obrázek 118: Střed kružnice (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet d)



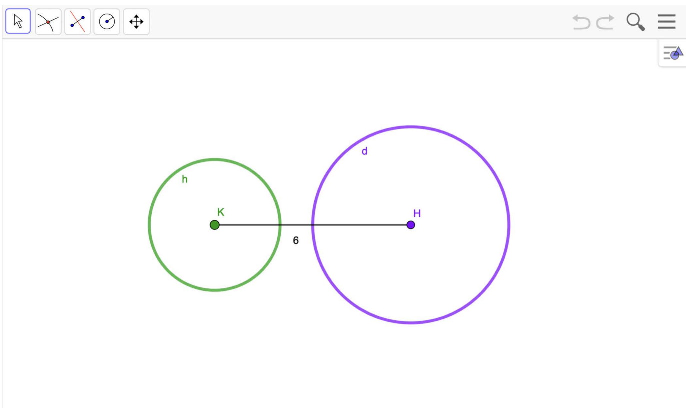
Obrázek 119: Tečny ke kružnici (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet e)



Obrázek 120: Plánek zahrady – měřítko (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet f)



Obrázek 121: Kružnice s vnějším dotykem (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úkol 1a) „Rozdělte úsečku *AB* bez měření na čtyři stejné části. Napovíme: K dispozici máte nástroj *Kružnice daná středem a bodem*.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 73, cv. 1)

Otázka 1a) Do odpovědi zapište postup konstrukce úkolu 1a).

Úkol 1b) „Konstruujte úhel = 60° a kružnici *k*, která se dotýká obou jeho ramen a má poloměr 2 cm.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 73, cv. 2)

Otázka 1b) Do odpovědi zapište postup konstrukce úkolu 1b).

Úkol 1c) „Anička nakreslila kružnici c, ale zapomněla vyznačit její střed. A teď by ho potřebovala.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 73, cv. 3). Konstruujte střed kružnice c pomocí GeoGebra nástrojů z nabídky. Napovíme: Vzpomeňte si na tětivy.

Otázka 1c) Do odpovědi zapište postup konstrukce úkolu 1c).

Úkol 1d) „Tečny kružnice n (S, 28mm), které procházejí bodem M, se dotýkají kružnice n v bodech T a R. Vzdálenost bodů M a S je 52 mm. Konstruujte bod M a obě tečny z bodu M k dané kružnici n.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 73, cv. 4)

Otázka 1d) Do odpovědi zapište postup konstrukce úkolu 1d).

Úkol 1e) „Uprostřed obdélníkové zahrady o rozměrech 12 m a 16 m je kruhový bazén s poloměrem 2 m. Konstruujte plánek zahrady s bazénem v měřítku 1 : 100 a doplňte do plánku přímé cesty široké 0,5 m, které procházejí napříč zahradou, dotýkají se kraje bazénu a jsou rovnoběžné s úhlopříčkou BD.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 73, cv. 5)

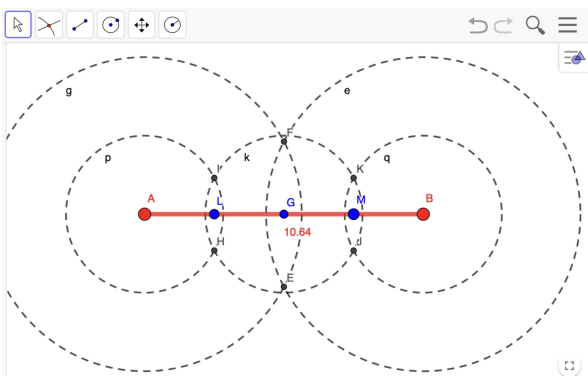
Úkol 1f) Konstruujte všechny kružnice s poloměrem 2 cm, které mají vnější dotyk s kružnicí h i s kružnicí d. Přitom velikost úsečky KH je 6 cm. Kružnice h má poloměr 2 cm a kružnice d má poloměr 3 cm.

Otázka 1f) Kolik takových kružnic jste našli?

Řešení:

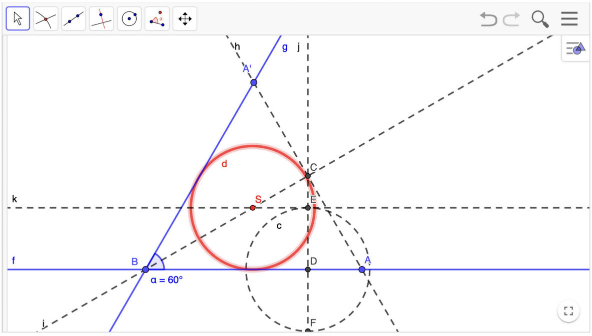
Otázky 1a)–f) Postupy konstrukcí se mohou u žáků lišit. Ukázky postupů konstrukcí jsou dostupné na https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/fgaugwpv.

Úkol 1a)



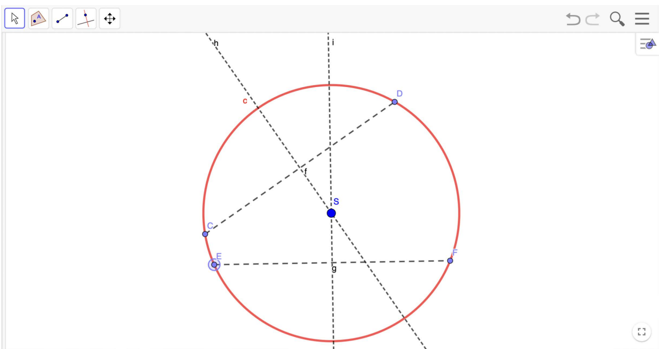
Obrázek 122: Řešení dělení úsečky (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Úkol 1b)



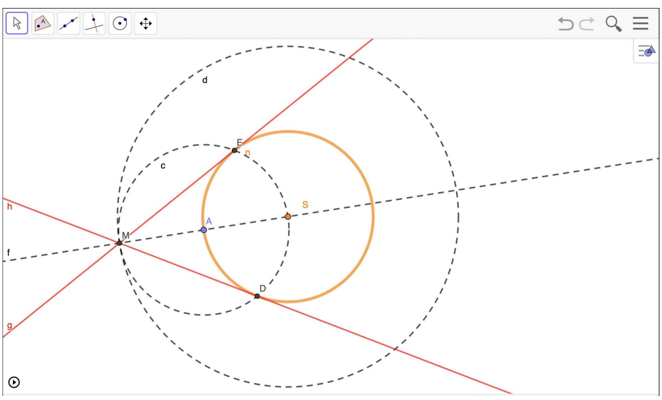
Obrázek 123: Řešení tečny kružnice a úhel (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Úkol 1c)



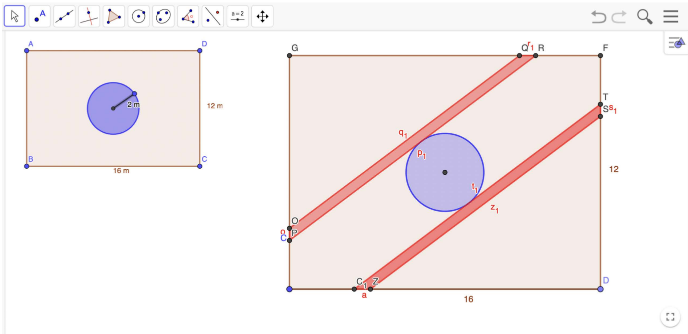
Obrázek 124: Řešení střed kružnice (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Úkol 1d)



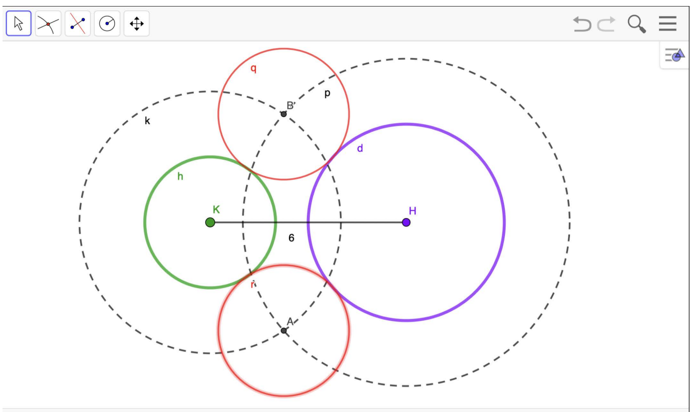
Obrázek 125: Řešení tečny ke kružnici (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Úkol 1e)



Obrázek 126: Řešení plánek zahrady – měřítko (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Úkol 1f)



Obrázek 127: Řešení kružnice s vnějším dotykem (PL 19), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Otázka 1f) 2

5.20 Pracovní list pro učitele 20 – Souhrnná cvičení 2

Kapitola: 5. Souhrnná cvičení

Popis aktivity: Online test na téma shrnutí geometrie 8. ročník

Odkaz na pracovní list pro žáky: https://www.geogebra.org/m/nrsujax4#material/xdfmvsdr

Učivo: Rovinné útvary: kružnice, kruh; přímka, úsečka, čtyřúhelník, úhel, pravidelné mnohoúhelníky; Metrické vlastnosti v rovině: Pythagorova věta; Prostorové útvary: rotační válec

Časová dotace: 45 min

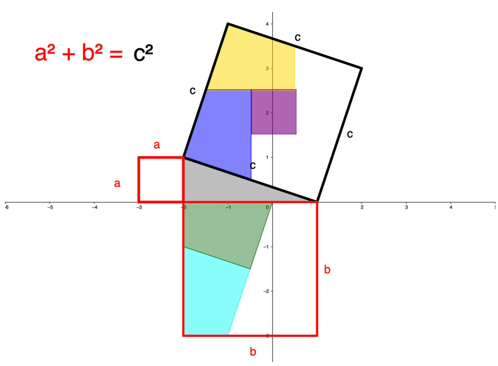
Metodický komentář: Tento pracovní list je určen jako test či cvičení shrnující učivo geometrie pro 8. ročník. Žáci pracují na čtyřech komplexních úlohách, do odpovědí následně zapisují postup řešení a odpovídají na otevřené otázky. V první úloze se seznámí s důkazem Pythagorovy věty a mají možnost si platnost věty ověřit. V druhém appletu konstruují pravidelný šestiúhelník, následně počítají jeho obvod a obsah. V appletu c) pracují s 3D modelem válce, počítají jeho povrch a objem. V závěrečné úloze pracují s modelem plnění nádob vodou a počítají množství vody v jednotlivých nádobách.

Očekávané výstupy v matematice: M-9-3-01, M-9-3-04, M-9-3-06, M-9-3-10, M-9-3-13, M-9-4-02

Zadání pro učitele s řešením

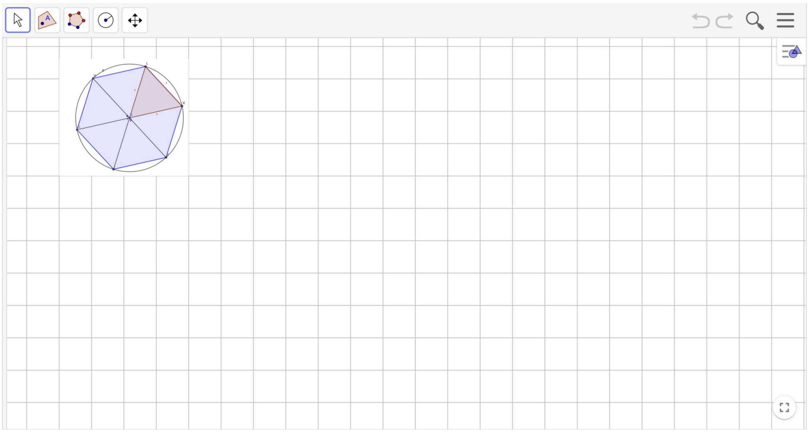
Interaktivní applety k aktivitě:

Applet a)



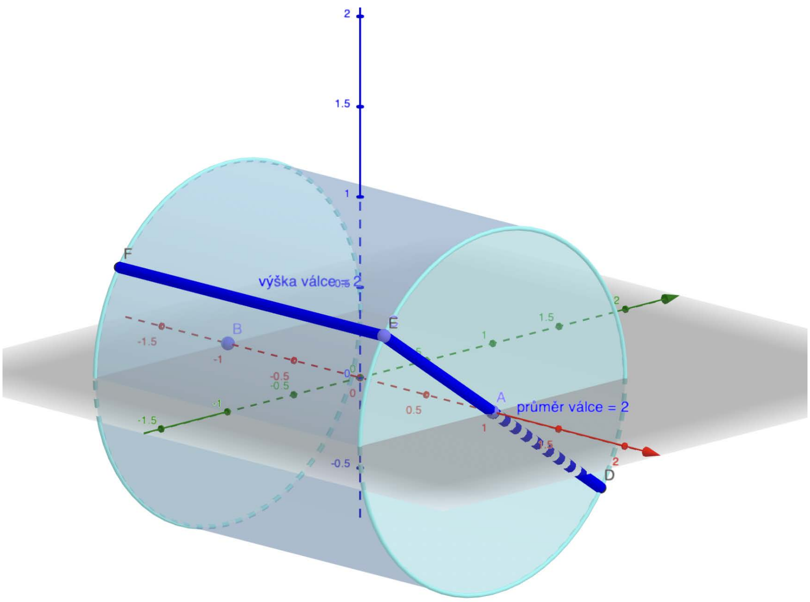
Obrázek 128: Důkaz Pythagorovy věty (PL 20), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet b)



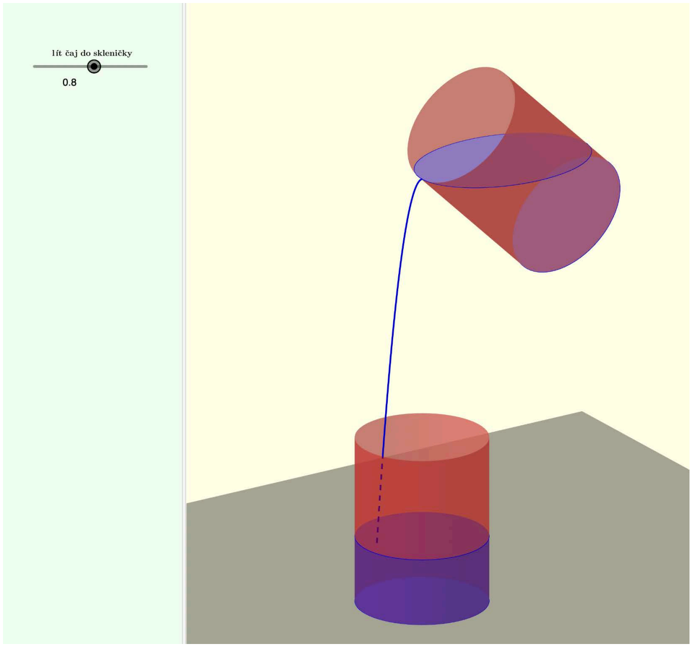
Obrázek 129: Konstrukce pravidelného šestiúhelníku (PL 20), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet c)



Obrázek 130: 3D model válce (PL 20), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Applet d)



Obrázek 131: Model plnění nádoby vodou (PL 20), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Úvodní texty, otázky a úkoly:

Úkol 1a) V appletu a) vidíte zápis Pythagorovy věty rovnicí $a^2 + b^2 = c^2$. Vaším úkolem je zamyslet se nad jejím významem a přeskládat barevné (žlutou, světle modrou, tmavě modrou, zelenou, fialovou) části z červených čtverců do čtverce černého.

Otázka 1a) Jak spočítáme obecně obsah černého čtverce?

Otázka 2a) Jak spočítáme obecně obsah červeného menšího čtverce?

Otázka 3a) Jak spočítáme obecně obsah červeného většího čtverce?

Otázka 4a) Jak tedy souvisí přeskládání těchto barevných částí s rovnicí $a^2 + b^2 = c^2$? Popište význam Pythagorovy věty svými slovy.

Otázka 5a) Jaký je obsah černého čtverce?

Úkol 1b) „Konstruujte pravidelný šestiúhelník, poloměr kružnice jemu opsané je $r = 4$ cm.“ (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 75, cv. 13)

Otázka 1b) Vypočítejte obsah šestiúhelníku sestrojeného v úkolu 1b) (výsledek zaokrouhli na dvě desetinná místa). Postup uveďte do odpovědi.

Otázka 2b) Vypočítejte obvod šestiúhelníku sestrojeného v úkolu 1b). Postup uveďte do odpovědi.

Otázka 1c) Průměr válce v appletu c) se rovná jeho výšce v. Určete objem tohoto válce, postup zapište do odpovědi.

Otázka 2c) Určete obsah pláště tohoto válce. Postup zapište do odpovědi.

Otázka 3c) Určete povrch tohoto válce. Postup zapište do odpovědi.

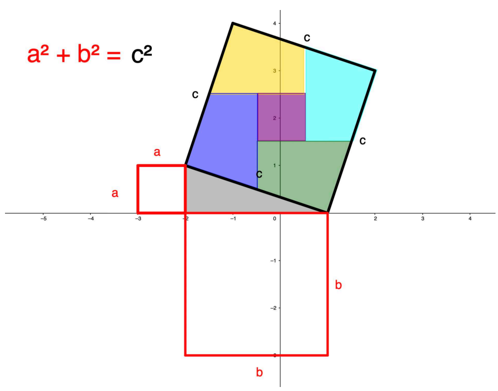
Úkol 1d) Potřebujeme přelít kapalinu z jedné nádoby do druhé. Nádoby mají stejné dno, nicméně nádoba, kterou držíme, je vyšší než nádoba, která leží na stole. Přelijte do nádoby na stole všechnu vodu a zjistěte tak její objem.

Otázka 1d) Jaká je výška nádoby na stole, víme-li, že průměr jejího dna je 10 cm? Postup uveďte do odpovědi.

Otázka 2d) Jaká je výška nádoby, ze které vodu naléváme, víme-li, že po naplnění nádoby na stole zbylo v druhé nádobě 0,2 litru vody? Postup uveďte do odpovědi.

Řešení:

Úkol 1a)



Obrázek 132: Řešení důkaz Pythagorovy věty (PL 20), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Otázka 1a) $c \cdot c = c^2$

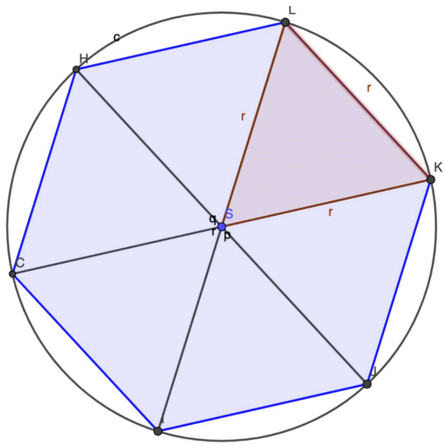
Otázka 2a) $a \cdot a = a^2$

Otázka 3a) $b \cdot b = b^2$

Otázka 4a) Odpovědi žáků se mohou lišit. Uvádíme příklad: Součet obsahů červených čtverců (nad odvěsnami trojúhelníku) se rovná obsahu černého čtverce (nad přeponou).

Otázka 5a) 10

Úkol 1b)



Obrázek 133: Řešení konstrukce pravidelného šestiúhelníku (PL 20), GeoGebra, (Nikola Brůžková, [06.03.2023])

Otázka 1b) 20,78 $\text{cm}^2 = 24 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Otázka 2b) $6 \cdot 4 = 24$ cm

Otázka 1c) 50,24 cm^3

Otázka 2c) 25,12 cm^2

Otázka 3c) 25,12 cm^2

Úkol 1d) Objem sklenice na stole je 1,5 litru.

Otázka 1d) 19,12 cm

Otázka 2d) 19,36 cm

Závěr

Tato kniha je věnována digitálnímu materiálu, který byl vytvářen po dobu dvou let vzájemné spolupráce obou autorek na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích, a to transformací tištěné učebnice U do digitální podoby. V jednotlivých kapitolách jsme se vyjadřovaly nejen k problémům obecným, ale také k jejich přesahům do konkrétního kurikula.

Tato publikace nemohla problematiku zcela vyčerpat, pokusily jsme se však prezentovat hlavní a související problémy, a také naznačit řešení, přinést inspiraci pro vytváření pracovních listů, aktivit pro žáky, vytvořit materiál vhodný například pro distanční výuku geometrie.

První verze aktivit pro výuku geometrie se nám v praxi během distanční výuky v době pandemie Covid 19 velice osvědčily, proto jsme se rozhodly v tvorbě dále pokračovat a digitální materiál rozšiřovat. Díky zpětným vazbám a dotazníkům od žáků a vyučujících z několika škol z Jihočeského kraje se nám podařilo objevit chyby a drobné nefunkčnosti, které bylo třeba opravit. Provedena byla opakovaná korekce digitálního materiálu, pomocí níž se podařilo odstranit problémy, které sami uživatelé během reálného využití materiálu nalezli. Aby mohli nově vytvořené materiály využívat i úplní začátečníci, kteří program GeoGebra neznají a nikdy s ním nepracovali, přeložily jsme ve spolupráci s Jihočeskou univerzitou hned několik GeoGebra návodů do českého jazyka.

Celá pandemická situace (nejen na území ČR) vedla nejen ve školách k velmi rychlému rozšíření digitálních technologií do všech odvětví běžného života. Tyto změny podpořily tzv. „malou revizi RVP“, která byla vydána v lednu roku 2021 a je stavebním programem pro školní vzdělávací programy, jež musejí všechny základní školy upravit do září roku 2023. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy a Národní pedagogický institut na webových stránkách zveřejnily hned několik podpůrných materiálů, které uvádějí způsoby, jak začlenit informační a komunikační technologie do výuky všech předmětů na 1. i 2. stupni ZŠ. Mezi programy, které podporují začlenění ICT do výuky matematiky v doporučeních MŠMT, patří i dynamický geometrický software, tedy například GeoGebra, jež je základní platformou digitálního materiálu této knihy. V sekci matematika a digitální technologie MŠMT a NPI ČR uvádějí: „Žáci se na druhém stupni učí [. . .] modelování geometrických útvarů a těles; využívají dynamický geometrický software, který přispívá k porozumění geometrickým vztahům a vlastnostem útvarů; podporuje osvojení geometrických dovedností a rozvoj prostorové představivosti. . . “ (MŠMT, 2022b).

Digitální materiál, který jsme vytvořily, může tedy podle našeho mínění učitele matematiky nejen inspirovat k tvorbě dalších aktivit, které budeme ve školní praxi nutně do výuky matematiky během následujících let muset začleňovat, ale může mu také sloužit jako hotové plánované kurikulum, které lze použít během výuky geometrie na základní škole. I proto jsme využily úlohy z učebnice matematiky, jež je v současné době ve školách stále tradičně nejpoužívanější. Učitelé ji dobře znají, její digitální rozpracování pro ně může představovat motivaci pro vlastní sebevzdělávání v oblasti využití počítačů ve výuce.

Seznam použitých zdrojů

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching and assessing*. Longman.

Balacheff, N., & Kaput, H. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde, (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers*.

Balacheff, N., Chan, T-W., Roschelle, J., Hsi, S., & 17 others (2006). One-to-One Technology-Enhanced Learning: An Opportunity for Global Research Collaboration. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, *1*, 3–29.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). Information Age.

Bendl, V. (2022, 22. února). *Využití digitálních technologií ve výuce matematiky*. RVP. https://clanky.rvp.cz/clanek/23028/VYUZITI-DIGITALNICH-TECHNOLOGII-VE-VYUCE-MATEMATIKY-.html

Bessenyei, I., Currie, K., Farkas, R., Fulantelli, G., Gedik-Buni, R. T., Lajtos-Prompt, G., Hartyányi, M., Mahood, E., Ravotto, P., Smith, M., Yaliniz-Buni, S., Lengyel, Z., & Gerhá, S. (2008). *E-learning: Teachers challenged by the Net Generation*. Tenegen consortium.

Binterová, H., & Fuchs, E. (2010). Learning Environments in the Context of the Schools Needs. *Mathematics Education with Technology – Experiences in Europe*. University of Augsburg.

Binterová, H., & Tlustý, P. (2013). *Učení matematiky s počítačem*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Brůžková, N. (2022). *Učebnice matematiky pro 8. ročník ZŠ a jejich připravenost pro distanční výuku* [Diplomová práce, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích]. https://theses.cz/id/n59gaz/

Černý, M. (2020). *Design digitálního vzdělávacího prostředí*. Flow.

Česká školní inspekce (ČŠI). (2009). *Úroveň ICT v základních školách v ČR: Tematická zpráva*. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Tematické%20zprávy/2009_uroven_ICT_ZS.pdf

Česká školní inspekce (ČŠI). (2013). *Výroční zpráva České školní inspekce za školní rok 2011/2012*. https://www.csicr.cz//html/vzcsi_2011_12/html5/index.html?&locale=CSY&pn=1

Česká školní inspekce (ČŠI). (2017). *Využívání digitálních technologií v mateřských, základních, středních a vyšších odborných školách: Tematická zpráva*. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Tematick%C3%A9%20zpr%C3%A1vy/F_TZ-Vyuzivani-digitalnich-technologii-v-MS,-ZS,-SS-a-VOS_kor.pdf

Česká školní inspekce (ČŠI). (2021a). *Průběžná zpráva o vyrovnávání nerovností ve vzdělávání ve školním roce 2021/2022: Přístupy škol ke snižování dopadů pandemie nemoci covid-19*. https://csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2021_pÅŹ%C3%ADlohy/Dokumenty/TZ_prubezna-zprava-vyrovnavani-nerovnosti_FINAL_20-12-2021.pdf

Česká školní inspekce (ČŠI). (2021b). *Kvalita a efektivita vzdělávání a vzdělávací soustavy ve školním roce 2020/2021: Výroční zpráva*. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2021_pÅŹ%C3%ADlohy/Dokumenty/VZ_CSI_2021_e-verze_22_11.pdf

Česká školní inspekce (ČŠI). (2021c). *Distanční vzdělávání rok od nástupu pandemie*. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/2021_p%C5%99%C3%ADlohy/Dokumenty/INFO_duben_2021_mini.pdf

Černochová, M., Komrska, T., & Novák, J. (1998). *Využití počítače ve vyučování: náměty pro práci dětí s počítačem*. Portál.

Dostál, J. (2007). *Počítač ve vzdělávání, modul 1*. Votobia.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of compregension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Dvořáková, K. (2014). *Informační technologie ve výuce matematiky – digitální učební materiály* [Disertační práce, Masarykova univerzita]. https://is.muni.cz/th/upnvg/

Eurofound. (2021), *The digital age: Implications of automation, digitisation and platforms for work and employment*. Challenges and prospects in the EU series, Publications Office of the European Union, Luxembourg.

European Commission. (2021). *Annex to the Commission Implemanting Decision on the financing of the Digital Europe Programme and the adoption of the mutiannual work programme for 2021–2022*. ANNEX.

Furner, J. M., & Marinas, C. A. (2020). *Teaching math with GeoGebra while developing a passion for photography*. The International Conference on Technology in Collegiate Mathematics 32nd Annual Conference, Orlando.

GeoGebra. (2021). *O nás*. https://www.geogebra.org/about

GeoGebra. (2022). *Návody*. https://www.geogebra.org/a/14?lang=cs

Hašek, R. (2017). *Základy geometrie: učební materiál*. Jihočeská univerzita. http://home.pf.jcu.cz/~hasek/ZS/ZGEOP_2017_Prednaska_7.pdf

Healy, L., & Sutherland, R. (1990). The use of spreadsheets within mathematics classroom. *Math. Educ. Sci. Technol*, (21), 847–862.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování* (2. vyd.). Portál.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování* (3. vyd.). Portál.

Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Univerzita Karlova.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70–95). Cambridge: Cambridge University Press.

Hlavenka, J. (1997). *Výkladový slovník výpočetní techniky a komunikací: 5 500 pojmů z oblasti výpočetní techniky: přes 7 000 křížových vazeb: výklad anglických a českých odborných pojmů* (3. vyd.). Computer Press.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2009). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28*(2), 135–146.

Horský, Z. (1988). *Pražský orloj*. Praha: Panorama, Pragensia (Panorama).

Choppin, J., & Zenon, B. (2017). *Trends in the design, development, and use of digital curriculum materials*. University of Rochester.

Kirk, G. S., Raven, J. E., & Schofield, M. (2004). *Předsokratovští filosofové: kritické dějiny s vybranými texty*. OIKOYMENH.

Kratochvíl, Z. (2010). *Mezi mořem a nebem: odkaz iónské archaické vnímavosti*. Pavel Mervart.

Krynický, M. (2010). *Matematika ZŠ, SŠ: 3.5.4 Středová souměrnost*. http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20SÅă/03%20Planimetrie/04%20Zobrazen%C3%AD%20v%20rovinÄŻ/04%20StÅŹedovÃą%20soumÄŻrnost.pdf

Křížek, M., Somer, L., & Šolcová, A. (2009). Deset matematických vět o pražském orloji [Ten mathematical theorems on the Prague astronomical clock]. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 54*(4), 281–300. https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141921

Kutzler B. (2003). CAS as pedagogical tools for teaching and learning mathematics, *Univ. S. Boh. Dept. Math. Rep., 11*(1), 89–105.

Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/PublikaceKnihy/KurinaMatematikaARU.pdf

Kynčl, R. (2008). *Hodiny a hodinky* (2. vyd.). Aventinum.

Liberatore, M. W. (2017). *Reading analytics and student performance when using an interactive textbook for a material and energy balances course*. ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings.

McCrindle, M. (2014). *The ABC of XYZ: understanding the global generations*. UNSW Press.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). (2014). *Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020.* https://www.edu.cz/strategie-msmt/strategie-digitalniho-vzdelavani-do-roku-2020/

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). (2020a). *Digitální gramotnost v uzlových bodech vzdělávání*. https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=94097&view=13123

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). (2020b). *Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2030+*. https://www.edu.cz/strategie-msmt/strategie-vzdelavaci-politiky-cr-do-roku-2030/

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. https://revize.edu.cz/files/rvp-zv-2021-s-vyznacenymi-zmenami.pdf

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). (2022a). *Soubor opatření a klíčových aktivit: Opatření č. 1 Revize RVP ZV v oblasti ICT*. https://www.edu.cz/strategie-msmt/strategie-vzdelavaci-politiky-cr-do-roku-2030/implementacni-karta-revize-rvp-zv/#RVP-1

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). (2022b). *Matematika a její aplikace – 2. stupeň*. https://revize.edu.cz/clanky/matematika-a-jeji-aplikace-2-stupen

Moss, G., Jewitt, C., Levači, R., Armstrong, V., Cardini. A., & Castle, F. (2007). *The interactive whiteboards, pedagogy and pupil performance evaluation: Evaluation of the Schools Whiteboard Expansion (SWE) Project*. Challenge Institute of Education.

Nádběla, J. (2006). *Velký počítačový slovník* (2. vyd). Computer Media.

Národní ústav pro vzdělávání (NÚV). (2018). *Základní východiska a teze revizí ICT kurikula*. https://archiv-nuv.npi.cz/t/1-zakladni-vychodiska-a-teze-revizi-ict-kurikula.html

Národní ústav pro vzdělávání (NÚV). (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělání*. MŠMT ČR. https://www.nuv.cz/file/4982/

Národní ústav pro vzdělávání (NÚV). (2022). *Rámcové vzdělávací programy*. https://www.nuv.cz/t/rvp

Neumajer, O. (2018). *Evropský rámec digitálních kompetencí pedagogů DigCompEdu*. https://spomocnik.rvp.cz/clanek/21855/EVROPSKY-RAMEC-DIGITALNICH-KOMPETENCI-PEDAGOGU-DIGCOMPEDU.html

Neumajer, O. (2020). *Příručka pro autory DUM*. https://autori.rvp.cz/informace-pro-jednotlive-moduly/digitalni-ucebni-materialy/prirucka-pro-autory-dum

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2013). *Matematika pro 8. ročník základní školy [3] – Kruh, kružnice, válec; konstrukční úlohy* (2. přeprac. vyd.). Prometheus.

Oomes, R. M. Th. E., Tersteeg, J. J. T. M., & Top, J. (2000). The epitaph of Ludolph van Ceulen. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 1*(2), 57–62.

Palfrey, J. G., & Gasser, U. (2008). *Born digital: understanding the first generation of digital natives*. Basic Books.

Pavlas, Tomáš et al. (2020). *Zkušenosti žáků a učitelů základních škol s distanční výukou ve 2. pololetí školního roku 2019/2020. Shrnutí vybraných zjištění a doporučení pro následující období* [Tématická zpráva]. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Tematické%20zprávy/TZ_Zkusenosti-zaku-a-ucitelu-ZS-s-distancni-vyukou-2-pol-2019-2020.pdf

Poláček, V., & Sedláček, L. (2015). *Dynamic geometry environments as cognitive tool in matematic education*. Univerzita Tomáše Bati. https://jtie.upol.cz/pdfs/jti/2015/02/05.pdf

Průcha, J. (1998). *Učebnice: teorie a analýzy edukačního média: příručka pro studenty, učitele, autory učebnic a výzkumné pracovníky*. Paido.

Posnick-Goodwin, S. (2010). Meet generation Z. *California Educator, 14*(5). http://www.cta.org/Professional-Development/Publications/Educator-Feb-10/Meet-Generation-Z.aspx

Rendl, M., & Vondrová, N. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Rendl, M., Vondrová, N. et al. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků*. Karolinum.

Revize RVP. (n.d.). *Matematika a její aplikace 2. stupeň*. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy & Národní pedagogický institut ČR. Získáno 12. 1. 2023, z https://revize.edu.cz/clanky/matematika-a-jeji-aplikace-2-stupen

Robová, J. (2012). *Integrace ICT jako prostředek aktivního přístupu žáků k matematice*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Schwabik, Š., & Šarmanová, P. (1996). *Malý průvodce historií integrálu*. Prometheus.

Sieglová, D. (2019). *Konec školní nudy: didaktické metody pro 21. století*. Grada.

Sladek, S., & Grabinger, A. (2013). *Gen Z: The First Generation of the 21st Century Has Arrived!* XYZ University.

Spitzer, M. (2014). *Digitální demence*. Host.

Tlustý, P., & Huclová, M. (2020). *Matematika s nadhledem 8: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. Fraus.

Vaníček, J. (2015). *Dynamická geometrie*. Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity. http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/dynamgeo/dyngeo.htm

Vaníček, J. (2009). *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Veselý, A. (2004). Společnost vedení jako teoretický koncept. *Sociologický časopis, 40*(4), 433–446. https://sreview.soc.cas.cz/pdfs/csr/2004/04/03.pdf

Vláda ČR (2013). *Digitální Česko V 2.0: Cesta k digitální ekonomice*. https://www.vlada.cz/assets/media-centrum/aktualne/Digitalni-Cesko-v--2-0_120320.pdf

Vondrová, N. et al. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy: metodický materiál pro učitele*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Wilder, S., & Mason, J. (2005). *Developing Thinking in Geometry*. The Open University.

Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: a definitiv, a metaphor, and a taxonomy. *Learning Technology*, (2830), 1–35.

Zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-561

Zormanová, L. (2022, 24. ledna). *Rizika a přínosy digitálních technologií pro děti*. RVP. https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/22971/rizika-a-prinosy-digitalnich-technologii-pro-deti.html

Seznam obrázků

Autoři:	Mgr. Nikola Brůžková doc. RNDr. Helena Koldová, Ph.D.
Odborné recenze:	Mgr. Roman Hašek, Ph.D. Mgr. Šárka Voráčová, Ph.D.
Vydalo nakladatelství:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta
Grafický návrh obálky:	Karel Řepa
Sazba:	Přemysl Rosa

1. vydání

ISBN 978-80-7694-004-8

Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

ISBN 978-80-7694-004-8